{@}
αλγόριθμος
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΚΤΗΡΙΟ 1: Πλ. Ηρώων Πολυτεχνείου 17 | Νέα Πεντέλη
ΚΤΗΡΙΟ 2: Πλ. Ηρώων Πολυτεχνείου 29 | Νέα Πεντέλη
ΚΤΗΡΙΟ 3: Πατριάρχου Γρηγορίου Ε4 | Νέα Πεντέλη
Τηλ.: 210 81.00.606 | www.algorithmos.edu.gr
e-mail: info@algorithmos.edu.gr

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ....

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ .... ΤΜΗΜΑ ....

ΜΑΘΗΜΑ .... ΒΑΘΜΟΣ

A4

α) Λ
β) Σ
γ) Σ
δ) Σ
ε) Λ

B **B1**

$$D_h = \{x \in D_g \,/\, g(x) \in D_f\}$$
$$= \{x \in [2,+\infty) \,/\, \sqrt{x-2}+1 > 1\}$$
$$= \{x \geq 2 \,/\, \sqrt{x-2} > 0\}$$
$$= \{x \geq 2 \,/\, x-2>0\} = \{x \geq 2 \,/\, x>2\}$$
$$= (2,+\infty)$$

$$h(x) = f(g(x)) = 2\ln(\sqrt{x-2}+\cancel{1}-\cancel{1}) = 2\ln\sqrt{x-2} = \ln\sqrt{x-2}^{\,2}$$
$$= \ln(x-2)$$

B2 Ισχύει ότι $h'(x) = \dfrac{1}{x-2} > 0 \ \forall x>2$ Άρα η f ↗ και "1-1" άρα αντιστρέψιμη

x	2	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	
$h(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to 2^+} h(x) = \lim_{x\to 2^+} \ln(x-2) = \lim_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$$
θέτω $u = x-2$
στο $x \to 2^+$
$u \to 0^+$

$$\lim_{x\to +\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(x-2) = +\infty$$

$$D_{h^{-1}} = h((2,+\infty)) = \mathbb{R}$$

Έστω $h(x)=y$

Άρα $y=\ln(x-2)$

$\Leftrightarrow e^y=e^{\ln(x-2)}$

$\Leftrightarrow e^y=x-2$

$\Leftrightarrow x=e^y+2$

$\Leftrightarrow f^{-1}(y)=e^y+2$

Άρα $h^{-1}(x)=e^x+2$, $D_{h^{-1}}=\mathbb{R}$

2ος τρόπος $D_{h^{-1}}$

Πρέπει

$x>2$

$\Leftrightarrow e^y+2>2$

$\Leftrightarrow e^y>0$

όπου ισχύει $\forall y\in\mathbb{R}$

B3

$$\lim_{x\to 2} h(x)\cdot\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left[\ln(x-2)\cdot\frac{2\ln(x-1)}{x-2}\right]=(-\infty)\cdot 2=-\infty$$

Ισχύει $$\lim_{x\to 2^+}\frac{(2\cdot\ln(x-1))'}{(x-2)'}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2}{x-1}}{1}=2$$

και $$\lim_{x\to 2^+}\ln(x-2)=\lim_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$$

Θέτω $u=x-2$

όταν $x\to 2^+$

$u\to 0^+$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 Αν η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y=\ell\in\mathbb{R}$ τότε $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\ell$

Αν $k\neq 0$ τότε $$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{kx^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}}=\begin{cases}+\infty & \text{αν } k>0\\ -\infty & \text{αν } k<0\end{cases}$$

άτοπο γιατί $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\ell\in\mathbb{R}$

Άρα πρέπει $\boxed{k=0}$ ώστε $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0$

Άρα η $y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη

Για $x=0$ η $f(x)=\dfrac{\mu x}{x^2+1}$ με παράγωγο

$$f'(x)=\frac{(\mu x)'\cdot(x^2+1)-\mu x\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{\mu(x^2+1)-\mu x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{\mu x^2+\mu-2\mu x^2}{(x^2+1)^2}$$

Άρα $f'(x)=\dfrac{\mu-\mu x^2}{(x^2+1)^2}$

η εφαπτομένη στο $O(0,0)$ είναι η $y=x$ άρα.

$$f'(0)=1 \Leftrightarrow \frac{\mu-\mu\cdot 0}{(0+1)^2}=1 \Leftrightarrow \mu=1$$

Η συνάρτηση γίνεται $\boxed{f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}}$

(Γ2) i) $f'(x)=\dfrac{x'\cdot(x^2+1)-x\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\dfrac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-x^2=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	ΟΕ	↗	ΟΜ	↘	0

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}=0$

ΟΕ $f(-1)=-\dfrac{1}{2}$ ΟΜ $f(1)=\dfrac{1}{2}$

ii) Αν $\Delta_1=(-\infty,-1]$ $f(\Delta_1)=[-\frac{1}{2},0)$

$\Delta_2=[-1,1]$ $f(\Delta_2)=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ Άρα

$\Delta_3=[1,+\infty)$ $f(\Delta_3)=(0,\frac{1}{2}]$

$$f(\mathbb{R})=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)\cup f(\Delta_3)=[-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}]$$

Επειδή $-\dfrac{1}{2}\le f(x)\le\dfrac{1}{2}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ και $\dfrac{1}{2}+a^2\ge\dfrac{1}{2}$ $\forall a\in\mathbb{R}$

η εξίσωση θα ισχύει μόνο αν $a=0$ και η μοναδική λύση είναι η τιμή του Ο.Μ για $x=1$. $\forall a\ne 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

Γ3

$$I_\nu + I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx + \int_0^1 \frac{x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1}dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} + \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}\cancel{(1+x^2)}}{\cancel{x^2+1}}dx = \int_0^1 x^{2\nu+1}dx = \left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2\nu+2}, \nu \in \mathbb{N}$$

για $\nu=0$ $\quad I_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\left[\ln|x^2+1|\right]_0^1 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1)$

Δηλαδή $\boxed{I_0 = \frac{1}{2}\ln 2}$

Ισχύει ότι $I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+2} \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$

Άρα για $\nu=0$

$$I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \quad \text{Δηλαδή}$$

$$\boxed{I_1 = \frac{1}{2} - I_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2}$$

και για $\nu=1$

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{4}$$

Άρα $I_2 = \frac{1}{4} - I_1 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2\right)$

Δηλαδή $\boxed{I_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2}$

{@}
αλγόριθμος
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΚΤΗΡΙΟ 1: Πλ. Ηρώων Πολυτεχνείου 17 | Νέα Πεντέλη
ΚΤΗΡΙΟ 2: Πλ. Ηρώων Πολυτεχνείου 29 | Νέα Πεντέλη
ΚΤΗΡΙΟ 3: Πατριάρχου Γρηγορίου Ε4 | Νέα Πεντέλη
Τηλ.: 210 81.00.606 | www.algorithmos.edu.gr
e-mail: info@algorithmos.edu.gr

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ....

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ .... ΤΜΗΜΑ ....

ΜΑΘΗΜΑ .... ΒΑΘΜΟΣ

Δ_1) Έστω συνάρτηση $h(x)=g(x)+x$ συνεχής ως πράξεις παραγωγίσιμων στο $[-1,0]$

$h(-1)=g(-1)-1<0$ εφόσον ισχύει $0<g(x)<1$ $\forall x\in\mathbb{R}$
θα ισχύει $g(-1)<1$
άρα $g(-1)-1<0$.

$h(0)=g(0)>0$ γιατί ισχύει $0<g(0)<1$

Άρα $h(-1)\cdot h(0)<0$ και από Θ. Bolzano υπάρχει $x_1\in(-1,0)$: $h(x_1)=0$

Ισχύει ότι $h'(x)=g'(x)+1\neq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$
και η h' συνεχής στο $\mathbb{R}$. Άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή $h'(x)>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ και $h\nearrow$
ή $h'(x)<0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ και $h\searrow$
Δηλαδή η h γνησίως μονότονη άρα "1-1"
και η ρίζα μοναδική.

2ος τρόπος (Άτοπο με Θ Rolle)

Έστω ότι υπάρχει και $x_2\neq x_1$ με $x_2>x_1$
όπου $h(x_2)=0$
τότε $h(x_1)=h(x_2)$
και η h συνεχής στο $[x_1,x_2]$
παραγ. στο (x_1,x_2)

από Θ Rolle $\exists\, \xi\in(x_1,x_2)\subseteq(-1,0)$ έτσι ώστε
$h'(\xi)=0 \Leftrightarrow$
$g'(\xi)=-1$
Άτοπο

Δ2 Εφόσον η f παραγωγίσιμη στο $D_f = (-\infty, \frac{\pi}{2})$

θα είναι παραγωγίσιμη και στο $x=0$

Άρα $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ όπου $f(0)=0$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2\cdot(g(x)+x)}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - kx}{x}$

$\Leftrightarrow 0\,(g(0)+0) = \lim_{x\to 0^+}\left[2\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - k\right]$

$\Leftrightarrow 0 = 2+1-k$

$\Leftrightarrow k=3$ εφόσον $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$ και $\lim_{x\to 0}(\sigma\upsilon\nu x)=1$

και ισχύει $f'(0)=0$

Δ3

Στο $[0,\frac{\pi}{2})$ ισχύει $f(x) = 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x$

παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3$

επειδή $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = 0$ $\frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

ισχύει ότι $\forall\, x\in[0,\frac{\pi}{2})$

$f'(x) = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{2\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot(\sigma\upsilon\nu x - 1) - (\sigma\upsilon\nu x-1)(\sigma\upsilon\nu x+1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

$= \frac{(\sigma\upsilon\nu x-1)\cdot(2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x - 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{(\sigma\upsilon\nu x-1)\cdot(2\sigma\upsilon\nu x+1)(\sigma\upsilon\nu x-1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

Άρα $f'(x) = \frac{(\sigma\upsilon\nu x-1)^2\cdot(2\sigma\upsilon\nu x+1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

Άρα: $f'(x)>0 \;\; \forall\, x\in[0,\frac{\pi}{2})$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	

οε.
$f(0)=0$

Άρα $f(x) \geq 0 \quad \forall\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

ii) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} εφx = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{ημx}{συνx} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \left(ημx \cdot \frac{1}{συνx}\right) = +\infty$

Ισχύει $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} ημx = 1$

και $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{συνx} = +\infty$

γιατί $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} συνx = 0$ με $συνx > 0$ όταν $x \to \frac{\pi}{2}^-$

Άρα
$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} 2ημx + εφx - 3x = +\infty$

επειδή $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} ημx = 1$

Αν $Δ = \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ το $f(Δ) = \left[f(0), \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x)\right) = [0, +\infty)$

Άρα $\frac{\pi}{3} \in f(Δ)$ και υπάρχει $x_2 \in Δ : f(x_2) = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow 3f(x_2) = \pi$ μοναδικό γιατί η $f \nearrow$ και "1-1"

Δ4. i) η συνάρτηση $h(x) = g(x) + x$ από $Δ_1$
έχει παράγωγο $h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0 \quad \forall x \in (-\infty, 0)$

Άρα η γνησίως μονότονη. Άρα για $x_1 > -1$
ισχύει $h(x_1) > h(-1)$ γιατί $h(x_1) = 0$
και $h(-1) = g(-1) - 1 < 0$

Άρα η $h \nearrow \quad \forall\ x \in (-\infty, 0)$

x	$-\infty$		x_1		0
$h'(x)$		$+$		$+$	
$h(x)$		$- \nearrow$	0	$\nearrow +$	

για $x_1 \leq x \leq 0$ ισχύει $h(x_1) \leq h(x) \Leftrightarrow h(x) \geq 0$

Επειδή $f(x) = x^2 h(x)$ θα ισχύει
$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [x_1, 0]$

αλγόριθμος
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΚΤΗΡΙΟ 1: Πλ. Ηρώων Πολυτεχνείου 17 | Νέα Πεντέλη
ΚΤΗΡΙΟ 2: Πλ. Ηρώων Πολυτεχνείου 29 | Νέα Πεντέλη
ΚΤΗΡΙΟ 3: Πατριάρχου Γρηγορίου Ε4 | Νέα Πεντέλη
Τηλ.: 210 81.00.606 | www.algorithmos.edu.gr
e-mail: info@algorithmos.edu.gr

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ....

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ .... ΤΜΗΜΑ ....

ΜΑΘΗΜΑ .... ΒΑΘΜΟΣ

ii) $E = \int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} |f(x)|\,dx = \int_{x_1}^{0} |f(x)|\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} |f(x)|\,dx$

Έχουμε αποδείξει ότι $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [x_1, 0]$ και $[0, \frac{\pi}{2})$

Άρα

$$E = \int_{x_1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$$

$$= \int_{x_1}^{0} x^2 \cdot (g(x) + x)\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x)\,dx$$

Ισχύει $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x)\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu x\,dx - \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\,dx - 3\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} x\,dx$

$= 2\left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \left[\ln|\sigma\upsilon\nu x|\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= 2\left(-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + \sigma\upsilon\nu 0\right) - \left(\ln(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}) - \ln(\sigma\upsilon\nu 0)\right) - 3\left(\frac{\frac{\pi^2}{9}}{2} - 0\right)$

$= 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(\ln\frac{1}{2} - \ln 1\right) - \frac{\pi^2}{6}$

$= 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} = E_1$

$$\int_{x_1}^{0} x^2 (g(x)+x)\,dx = \int_{x_1}^{0} \left(\frac{x^3}{3}\right)' \cdot (g(x)+x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}(g(x)+x)\right]_{x_1}^{0} - \int_{x_1}^{0} \frac{x^3}{3}\cdot(g'(x)+1)\,dx$$

$$= 0 - \frac{x_1^3}{3}\cdot\overset{0}{(g(x_1)+x_1)} - \int_{x_1}^{0} \frac{x^3}{3} g'(x)\,dx - \int_{x_1}^{0} \frac{x^3}{3}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{x_1} - \int_{x_1}^{0} \frac{x^3}{3} g'(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{x_1^4}{4} - \frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx = E_2$$

Επειδή πρέπει $E_1 = E_2$

$$1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{3}\frac{x_1^4}{4} - \frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3\cdot g'(x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow 3 + 3\ln 2 - \frac{\pi^2}{2} = \frac{x_1^4}{4} - \int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3\ln 2 - 3}$$