αλγόριθμος
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΚΤΗΡΙΟ 1: Πλ. Ηρώων Πολυτεχνείου 17 | Νέα Πεντέλη
ΚΤΗΡΙΟ 2: Πλ. Ηρώων Πολυτεχνείου 29 | Νέα Πεντέλη
ΚΤΗΡΙΟ 3: Πατριάρχου Γρηγορίου Ε4 | Νέα Πεντέλη
Τηλ.: 210 81.00.606 | www.algorithmos.edu.gr
e-mail: info@algorithmos.edu.gr

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ .....

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ..... ΤΜΗΜΑ .....

ΜΑΘΗΜΑ ..... ΒΑΘΜΟΣ [redacted]

Θέμα Α

Α1 Σελ 186

Α2 " Σελ 76

Α3 " Σελ 161

Α4 α) Ε

β) Σ

γ) Λ

δ) Λ

ε) Σ

Θέμα Β

$f(x) = x^3 + ax^2 + 9x - 3$ με $\mathbb{R}$ $\quad f'(x) = 3x^2 + 2ax + 9$

Β1 Αφού έχει ακρότατο στο $x_0 = 1$ και η 1η παράγωγος της $\mathbb{R}$ στο Θ. Fermat $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + 2a + 9 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12 + 2a = 0 \Leftrightarrow a = -6$

Β2 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$\Delta = 144 - 12 \cdot 9 = 36$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 3$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
		Δ_1		Δ_2		Δ_3	

f συνεχής στο Δ_1 και $\nearrow$

$f(\Delta_1) = (\lim_{x \to -\infty} f(x), f(1)] = (-\infty, 1]$

f συνεχ. στο Δ_2 και $\searrow$

$f(\Delta_2) = [f(3), f(1)] = [-3, 1]$

f συνεχ. στο Δ_3 και $\nearrow$

$f(\Delta_3) = [f(3), \lim_{x \to +\infty} f(x)) = [-3, +\infty)$

Σαρώθηκε με το CamScanner

Το $0 \in f(A_1)$ υπάρχει τουλάχιστον $x_1 \in (-\infty, 1)$ $f(x_1)=0$
λόγω μονοτονίας της $f \nearrow$

Το $0 \in f(A_2)$ " " $x_2 \in (1,3)$ $f(x_2)=0$
λόγω $f \searrow$

Το $0 \in f(A_3)$ " " $x_3 \in (3,+\infty)$ με $f(x_3)=0$

B3) $f'(x) = 3x^2 - 12x^2 + 9x - 3$

$f''(x) = 6x - 12$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

Κοίλη στο $(2,+\infty)$
κυρτή στο $(-\infty,2)$
Με σημείο καμπής το $A(2, f(2))$

B4. $g(x) = x + f(x)$

Στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$ η εφαπτομένη είναι

$y - f(\xi) = f'(\xi)(x-\xi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = f'(\xi)x - \xi f'(\xi) + f(\xi)$

Για $x=0$ είναι $y = -\xi f'(\xi) + f(\xi)$

Στο σημείο $B(\xi, g(\xi))$ η εφαπτομένη είναι

$y - g(\xi) = g'(\xi)\cdot(x-\xi) \Leftrightarrow y = g'(\xi)\cdot x - \xi g'(\xi) + g(\xi)$

Για $x=0$ είναι $y = -\xi g'(\xi) + g(\xi) =$

$g'(x) = 1 + f'(x)$

$= -\xi(1 + f'(\xi)) + \xi + f(\xi)$

$= \cancel{-\xi} - \xi f'(\xi) \cancel{+\xi} + f(\xi)$

$= -\xi f'(\xi) + f(\xi)$

Άρα έχουν σημείο τομής στον $y'y$
το $\Gamma(0, -\xi f'(\xi) + f(\xi))$.

anyorithmos
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
Σαρώθηκε με το CamScanner

αλγόριθμος
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΚΤΗΡΙΟ 1: Πλ. Ηρώων Πολυτεχνείου 17 | Νέα Πεντέλη
ΚΤΗΡΙΟ 2: Πλ. Ηρώων Πολυτεχνείου 29 | Νέα Πεντέλη
ΚΤΗΡΙΟ 3: Πατριάρχου Γρηγορίου Ε4 | Νέα Πεντέλη
Τηλ.: 210 81.00.606 | www.algorithmos.edu.gr
e-mail: info@algorithmos.edu.gr

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ .....

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ..... ΤΜΗΜΑ .....

ΜΑΘΗΜΑ ..... ΒΑΘΜΟΣ [redacted]

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (e^x \cdot \eta\mu x) = e^0 \cdot 0 = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x^2+x} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ η f συνεχής για $x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^x \cdot \eta\mu x}{x} = 1$

γιατί $\lim\limits_{x\to 0^-} e^x = 1$ κ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(\sqrt{x^2+x})'}{(x)'} \overset{\frac{0}{0}}{=}$ DH

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} (2x+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} (2x+1) = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}} = +\infty$

Επειδή $2\sqrt{x^2+x} > 0$ κοντά στο 0.

Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$.

Σαρώθηκε με το CamScanner

(Γ2) Το $D_f = \mathbb{R}$ και η f συνεχής στο $\mathbb{R}$
Άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (e^x \cdot \eta\mu x)$$

Ισχύει $-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Άρα $-e^x \leq e^x \eta\mu x \leq e^x$

Επειδή $\lim_{x \to -\infty} (-e^x) = 0$ και $\lim_{x \to -\infty} (e^x) = 0$ } από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \to -\infty} (e^x \cdot \eta\mu x) = 0$

Άρα η $y = 0$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x}\overset{|x|=x}{\underset{x\to+\infty}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\cancel{x}}=1=\lambda$$

διότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)\cdot(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\cdot 1}{\cancel{x}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

Άρα η $\boxed{y=x+\frac{1}{2}}$

Γ3) Θέλω ν.α.ο. $\exists\,\xi\in(-\pi,0):\ f(x)=x+\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow e^x\cdot\eta\mu x-x-\frac{1}{2}=0$

Έστω $g(x)=e^x\cdot\eta\mu x-x-\frac{1}{2}$ συνεχής στο $[-\pi,0]$ ως πράξεις συνεχών

$$\left.\begin{aligned}g(-\pi)&=e^{-\pi}\cdot\eta\mu(-\pi)+\pi-\frac{1}{2}=\pi-\frac{1}{2}>0\\ g(0)&=e^0\cdot\eta\mu 0-0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}<0\end{aligned}\right\}\ g(-\pi)\cdot g(0)<0$$

Από Θ. Bolzano

$\exists\,\xi\in(-\pi,0):\ g(\xi)=0$

αλγόριθμος
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
Σαρώθηκε με το CamScanner

Γ4 Ισχύει $y(t)=\sqrt{x^2(t)+x(t)}$

Άρα $y'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2(t)+x(t)}}\cdot 2x(t)x'(t)+x'(t)$

$$y'(t)=\frac{2x(t)+1}{2\sqrt{x^2(t)+x(t)}}\cdot x'(t)$$

Τη χρονική στιγμή t_0 πρέπει

$$x'(t_0)=y'(t_0)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x'(t_0)}=\frac{2x(t_0)+1}{2\sqrt{x^2(t_0)+x(t_0)}}\cdot \cancel{x'(t_0)},\quad x'(t_0)>0$$

$$\Leftrightarrow 1=\frac{2x(t_0)+1}{2\sqrt{x^2(t_0)+x(t_0)}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2(t_0)+x(t_0)}=2x(t_0)+1$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{x^2(t_0)+x(t_0)}\right)^2=\left(2x(t_0)+1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 4\cdot\cancel{x^2(t_0)}+\cancel{4x(t_0)}=\cancel{4x^2(t_0)}+\cancel{4x(t_0)}+1$$

$$0=1$$

Η εξίσωση αδύνατη

Άρα δεν υπάρχει $t_0>0$ ώστε να ισχύει

$$x'(t_0)=y'(t_0)\ \checkmark$$

αλγόριθμος
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Σαρώθηκε με το CamScanner

αλγόριθμος
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΚΤΗΡΙΟ 1: Πλ. Ηρώων Πολυτεχνείου 17 | Νέα Πεντέλη
ΚΤΗΡΙΟ 2: Πλ. Ηρώων Πολυτεχνείου 29 | Νέα Πεντέλη
ΚΤΗΡΙΟ 3: Πατριάρχου Γρηγορίου Ε4 | Νέα Πεντέλη
Τηλ.: 210 81.00.606 | www.algorithmos.edu.gr
e-mail: info@algorithmos.edu.gr

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ .....

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ..... ΤΜΗΜΑ .....

ΜΑΘΗΜΑ ..... ΒΑΘΜΟΣ [redacted]

ΘΕΜΑ Δ

$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ $\quad F'(x)=f(x)$ στο $(0,+\infty)$

Ισχύει $x f(x) = 2F(x)\cdot\ln x$, $x>0$

η εφαπτομένη της C_f στο $M(1,f(1))$ έχει $f'(1)=2$

Δ1. Ισχύει $x^{\ln x} = e^{\ln x^{\ln x}} = e^{\ln x\cdot\ln x} = e^{\ln^2 x}$, $x>0$

οπότε $(x^{\ln x})' = (e^{\ln^2 x})' = e^{\ln^2 x}\cdot(\ln^2 x)' = x^{\ln x}\cdot\frac{2\ln x}{x}$

η g παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$

με $g'(x) = \dfrac{F'(x)\cdot x^{\ln x} - F(x)(x^{\ln x})'}{(x^{\ln x})^2}$

$$= \frac{f(x)\cdot x^{\ln x} - F(x)\cdot(e^{\ln^2 x})'}{(x^{\ln x})^2} = \frac{f(x)\cdot x^{\ln x} - F(x)\cdot x^{\ln x}\cdot\frac{2\ln x}{x}}{(x^{\ln x})^2}$$

$$= \frac{\cancel{x^{\ln x}}\left(f(x) - \frac{2\ln x\cdot F(x)}{x}\right)}{(x^{\ln x})^{\cancel{2}}} = \frac{x\cdot f(x) - 2\ln x\cdot F(x)}{x\cdot x^{\ln x}}$$

Επειδή $x\cdot f(x) = 2F(x)\ln x$ $\forall x>0$ ισχύει $g'(x)=0$, $\forall x>0$

Άρα η g σταθερή στο $(0,+\infty)$

Σαρώθηκε με το CamScanner

Δ_2 i) Ισχύει ότι για $x=1$ από αρχική σχέση

$$f(1)=2F(1)\cdot \ln 1 = 0$$

Άρα

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}$$

i) $$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{f(x)}{x-1}}{\frac{\ln x}{x-1}}=\frac{f'(1)}{1}=2$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(x-1)'}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1$$

ii) Ισχύει για $x\neq 1$ $F(x)=\frac{x\cdot f(x)}{2\ln x}$

Η F συνεχής ως παραγ. στο $x_0=1$

Άρα $$F(1)=\lim_{x\to 1}F(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot f(x)}{2\ln x}\overset{\Delta_2 i)}{=}\frac{1}{2}\cdot 2=1$$

Η g σταθερή από Δ_1 άρα

$$g(x)=c \Leftrightarrow \frac{F(x)}{x^{\ln x}}=c \Leftrightarrow F(x)=c\cdot x^{\ln x}$$

για $x=1$ $F(1)=c\cdot 1^0 \Leftrightarrow 1=c$

Άρα $F(x)=x^{\ln x}$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗ ΣΕΚΟΝΔΑΡΙΑ
απλόρίθμος
Σαρώθηκε με το CamScanner

Δ3 $F'(x) = \left(e^{\ln^2 x}\right)' = e^{\ln^2 x} \cdot \frac{2\ln x}{x}$

$F'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

x	0		1		$+\infty$
$F'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$F(x)$	‖	↘	ΟΕ.	↗	

$F(1) = 1$

Η εξίσωση $F(x^2) = F(x) - (x-1)^2$ επαληθεύεται για $x = 1$

για $x > 1 \Leftrightarrow x^2 > x \xLeftrightarrow{F\nearrow} F(x^2) > F(x)$

$\Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0$

ενώ $-(x-1)^2 < 0$ ισχύει

$F(x^2) - F(x) > -(x-1)^2$ και δεν ισχύει η ισότητα

για $0 < x < 1 \Leftrightarrow 0 < x^2 < x \xLeftrightarrow{F\searrow} F(x^2) > F(x)$

$\Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0$

και ισχύει $F(x^2) - F(x) > -(x-1)^2$ και η ισότητα δεν ισχύει

Άρα η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$

απόρριθμος
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
Σαρώθηκε με το CamScanner

Δ_4 Ισχύει $e^x \geq x+1 \quad \forall x>0$

Άρα θα ισχύει $e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x+1$

$\Leftrightarrow F(x) \geq \ln^2 x+1 \quad \forall x>0$

Επιπλέον η $F(x) \geq 1 > 0 \quad \forall x>0$

$$E = \int_1^e F(x)\,dx$$

και ισχύει $\int_1^e F(x)\,dx > \int_1^e (\ln^2 x+1)\,dx$

$$\int_1^e (\ln^2 x+1)\,dx = \int_1^e x'\ln^2 x\,dx + \int_1^e 1\,dx$$

$$= [x\ln^2 x]_1^e - \int_1^e x\cdot 2\ln x\cdot \frac{1}{x}\,dx + [x]_1^e$$

$$= e\ln^2 e - 2\int_1^e x'\ln x\,dx + e - 1$$

$$= e - 2\left([x\ln x]_1^e - \int_1^e 1\,dx\right) + e - 1$$

$$= e - 2\left(e - [x]_1^e\right) + e - 1$$

$$= \cancel{2e} - \cancel{2e} + 2(e-1) - 1$$

$$= 2e - 3$$

Άρα $E > 2e-3$

αλγόριθμος
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
Σαρώθηκε με το CamScanner