ΘΕΜΑ Β

$$D_{g\circ h} = \{ x \in D_h \ / \ h(x) \in D_g \}$$
$$= \{ x > 0 \ / \ \ln x \in \mathbb{R} \} = (0, +\infty)$$

B1 $$g\circ h(x) = g(h(x)) = \frac{4 - e^{2\cdot \ln x}}{e^{\ln x}}$$
$$= \frac{4 - e^{\ln x^2}}{x} = \frac{4 - x^2}{x}, \ x > 0$$

B2 i) Η f παραγ. στο $(0, +\infty)$

με $f'(x) = -\frac{4}{x^2} - 1 < 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$

Άρα $f \downarrow$ στο $(0, +\infty)$

ii) Θέλω ν.δ.ο.
$$\frac{4 - \pi^2}{4 - e^2} > \frac{\pi}{e}$$

πολ/ζω με $e(4 - e^2) < 0$
$$(4 - \pi^2)\cdot e < \pi\,(4 - e^2)$$

διαιρώ με $\pi e > 0$
$$\frac{4 - \pi^2}{\pi} < \frac{4 - e^2}{e} \Leftrightarrow$$
$$f(\pi) < f(e)$$

$\overset{f\downarrow}{\Longleftrightarrow}$ $\pi > e$ οπου ισχύει

B3 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{4-x^2}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} (4-x^2)\cdot \dfrac{1}{x} = +\infty$

γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}(4-x^2) = 4 > 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

γιατί $x > 0$ κοντά στο 0.

Άρα η $x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4-x^2}{x^2}$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = -1 = \lambda$

$\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x)+x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4}{x} = 0 = \beta$

Άρα η $\boxed{y=-x}$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

B4 $|\sigma\upsilon\nu(1+x^2)| \leq 1$

για $x>2$ $f(x)<0$

$-\dfrac{1}{f(x)} \geq \dfrac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} \geq \dfrac{1}{f(x)}$

Ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{4-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{-x^2}$

$$= \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

Ομοίως $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{f(x)}\right) = 0$

Από Κ.Π. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} = 0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 Ισχύει $\int_2^3 x\,f(x)\,dx = 1$

$$\Leftrightarrow \int_2^3 (1+ax)\,dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[x+\frac{ax^2}{2}\right]_2^3 = 1$$

$$\Leftrightarrow \cancel{3}+\frac{9}{2}a-\cancel{2}+2a = \cancel{1}$$

$$\Leftrightarrow a=0$$

Άρα $f(x) = \begin{cases} x^2-3x+3, & x<1 \\ \frac{1}{x}, & x\geq 1 \end{cases}$

Γ2

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{(x-1)}}=-1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1-x}{x}}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\left(-\frac{1}{x}\right)=-1$$

Άρα $f'(1)=-1$

Η εξίσωση εφαπτομένης στο (1,

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)$$

$$y=-x+2$$

Ισχύει $f'(1)=-1$

$$\text{εφ}\omega=-1$$

$$\omega=\frac{3\pi}{4}\ \text{rad}$$

Scanned with CamScanner

Γ_3 Η f συνεχής στο $x_0 = 1$

με $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

Η f συνεχής στο $x_0 = 1$ και στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x < 1 \\ -\dfrac{1}{x^2}, & x \geq 1 \end{cases}$$

Ισχύει $f'(x) < 0 \quad \forall x < 1$

και $f'(x) < 0 \quad \forall x \geq 1$

Άρα $f'(x) < 0$ στο $\mathbb{R}$ και επειδή είναι συνεχής ισχύει $f \downarrow$ στο $\mathbb{R}$ και "1-1"

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$

$f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)\right) = (0, +\infty)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

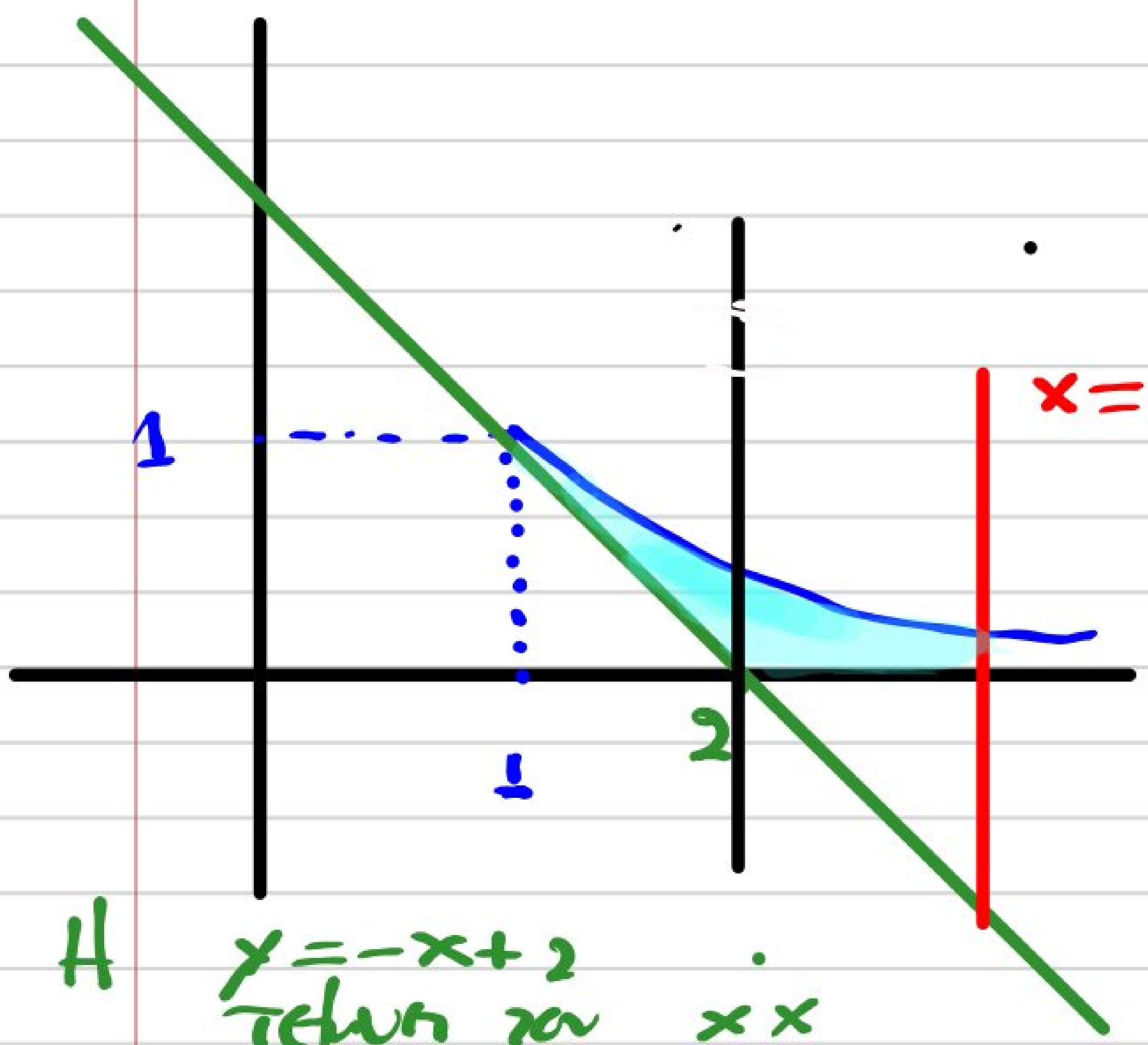
Γ4 Για $x>1$ ισχύει $f''(x)=\frac{2}{x^3}>0$

για κάθε $x\in(1,+\infty)$

Άρα η f κυρτή στο $[1,+\infty)$

και ισχύει $f(x)\geq -x+2$

Η ισότητα ισχύει για $x=1$



Η $y=-x+2$ τέμνει τον $x'x$ στο $x=2$

$$E=\int_1^2 (f(x)+x-2)\,dx+\int_2^e f(x)\,dx =$$

$$\int_1^2 f(x)\,dx + \int_1^2 (x-2)\,dx + \int_2^e f(x)\,dx =$$

$$= \int_1^e f(x)\,dx + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2$$

$$= \int_1^e \frac{1}{x}\,dx + \frac{4}{2} - 4 - \frac{1}{2} + 2$$

$$= \Big[\ln|x|\Big]_1^e + \frac{3}{2} - 2$$

$$= 1 + \frac{3}{2} - 2 = \frac{1}{2}\ \tau.\mu.$$

ΘΕΜΑ Δ.

Ισχύει $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-2x}{x-1} = \ell \in \mathbb{R}$

Άρα αν θεωρήσουμε

$$g(x) = \frac{f(x)-2x}{x-1} \quad \text{με} \quad \lim_{x \to 1} g(x) = \ell$$

$$f(x) = g(x)(x-1) + 2x$$

Η f συνεχής (συνεχιών) στο $(0,2)$ ως πράξεις

Άρα $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} [g(x)(x-1)+2x] = 2$

$f(1) = k-1$

Επειδή $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$2 = k-1$

$\Leftrightarrow k = 3$

$f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3$

Δ2 Η f παραγ. στο $(0,2)$ με

$$f'(x) = \frac{1}{2-x}(-1) + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{x^2+x-2}{x^2(x-2)} = \frac{(x-1)(x+2)}{x^2(x-2)}$$

Scanned with CamScanner

$f'(x) \geq 0$

$\frac{(x-1)(x+2)}{x^2(x-2)} \geq 0$

$x^2(x-2)(x-1)(x+2) \geq 0$

x	$-\infty$	-2	1	2	0	$+\infty$
x^2	$+$	$+$	$+$	$+$		
x^2+x-2	$+$	0 $-$	0 $+$	$+$		
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0 $+$		
$f'(x)$	$-$	$+$	0 $-$	$+$		

x	0	x_1	1	x_2	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-$	0 $\nearrow$ $+$	2	$\searrow$ 0	$-$

$f(\frac{1}{3}) = \ln\frac{5}{3} - 3 + 3$

$= \ln\frac{5}{3} > 0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

γιατί $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Άρα $\exists\ \kappa \in (0, \frac{1}{3}) : f(\kappa) < 0$

Επίσης $f(\kappa) < 0$

Άρα $f(\kappa) f(\frac{1}{3}) < 0$

Η f συνεχής στο $[\kappa, \frac{1}{3}]$ ως πράξεις συνεχών

από Θ. Bolzano $\exists\ x_1 \in (\kappa, \frac{1}{3}) : f(x_1) = 0$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right) = -\infty$

$= -\infty$

γιατί $\lim_{x\to 2^+} \ln(2-x) = \lim_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$

θέτω $u = 2-x$ όταν $x \to 2^+$, $u \to 0^+$

έστω $\Delta_1 = (0,1]$

με $f(\Delta_1) = (-\infty, 2]$

$0 \in f(\Delta_1)$ και $f(x_1) = 0$ μοναδικό

γιατί $f \nearrow$ και "1-1" στο Δ_1

$\Delta_2 = (1, +\infty)$

με $f(\Delta_2) = (-\infty, 2)$

$0 \in f(\Delta_2)$ Άρα $\exists\, x_2 \in \Delta_2 : f(x_2) = 0$

Δ_3 Θέλω ν.δ.ο.

$$\exists\, \xi \in (0,1) : f'(\xi) = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$$

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1}$$

Η f συνεχής στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$

Η f παραγ. στο $\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$

από Θ.Μ.Τ.

$$\exists\, \xi \in (0,1) : f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1}$$

Άρα $f'(\xi) = \dfrac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$

Δ_4 Ισχύει $F'(x) = f(x)$

και $G'(x) = f(x)$

από θεώρημα

Άρα $\boxed{F(x) = G(x) + c}$

$F(x_1) = G(x_1) + c = 0$

$G(x_2) = F(x_2) - c = 0$

$F(x_1) + G(x_2) = G(x_1) + F(x_2) = 0$

ii) $x_1 F(x) + x_2 G(x) + 2x - x_1 - x_2 = 0$

Έστω

$k(x) = x_1 F(x) + x_2 G(x) + 2x - x_1 - x_2$

$k(x_1) = x_1 F(x_1) + x_2 G(x_1) + x_1 - x_2$

$= x_2 G(x_1) + x_1 - x_2$

$= -x_2 F(x_2) + (x_1 - x_2) < 0$

Ισχύει $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [x_1, x_2]$

Άρα $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx > 0 \Leftrightarrow \left[F(x)\right]_{x_1}^{x_2} > 0$

$\Leftrightarrow F(x_2) - F(x_1) > 0$

$\Leftrightarrow F(x_2) > 0$

$$K(x_2) = x_1 F(x_2) + x_2 G(x_2) + x_2 - x_1$$

$$= x_1 F(x_2) + x_2 - x_1 > 0$$

$K(x_1)K(x_2) < 0$

Η K συνεχής στο $[x_1, x_2]$ από

Θ. Bolzano $\exists\, x_0 \in (x_1, x_2)$:

$$K(x_0) = 0$$

$$K'(x) = x_1 f(x) + x_2 f(x) + 2 > 0, \ \forall x \in (x_1, x_2)$$

Άρα $K \nearrow$ και "1-1"

η ρίζα μοναδική