ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1.Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ ’ ένα διάστημα [α , β] . Αν Gείναι μια παράγουσα της f στο [α , β] , τότε να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = G(\beta) - G(\alpha)$ **Μονάδες 8**

Α2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ;

Μονάδες 4

Α3. Δίνεται συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Πότε η ευθεία y = λx + β λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$

Μονάδες 3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις πού ακολουθούν , γράφοντας στη κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό** , αν η πρόταση είναι σωστή , ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Κάθε συνεχής συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

Μονάδες 2

β.Αν για μια συνεχή συνάρτηση στο διάστημα [α , β] ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$ τότε υποχρεωτικά f(x) = 0 για κάθε x∈[α , β]

Μονάδες 2

γ. Κάθε συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ δεν έχει ασύμπτωτες
Μονάδες 2

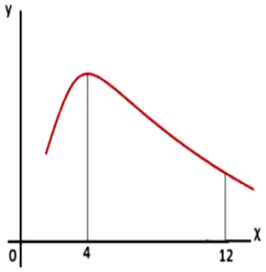
δ. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$τότε μεταξύ δύο θέσεων ακροτάτων

υπάρχει τουλάχιστον μια θέση σημείου καμπής.

Μονάδες 2

ε. Μια συνάρτηση f έχει την παραπάνω γραφική παράσταση και είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Τότε

$$\int_4^{12} f''(x)dx < 0$$



Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{x^2+1}{e^x}$, $x\in \mathbb{R}$και $g(x)=\sqrt{x}$, $x\geq 0$

Β1.Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρεθούν ,αν υπάρχουν τα σημεία καμπής της.

Μονάδες 7

Β2. Να δείξετε ότι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που διέρχεται

από το σημείο Α(1 , 0) έχει εξίσωση y = –x + 1

Μονάδες 4

Β3.Να βρείτε σημείο Μ της γραφικής παράστασης της g το οποίο απέχει την ελάχιστη

απόσταση από το σημείο $B\left(\frac{9}{2}, 0\right)$

Μονάδες 7

Β4.α)Να βρείτε το σημείοΛτης γραφικής παράστασης της συνάρτησης gστο οποίο η

εφαπτόμενη είναι κάθετη στην ευθεία του ερωτήματος **(Β2)**

Μονάδες 3

β)Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική

της συνάρτησης g, την εφαπτομένη της στο σημείο $\Lambda\left(\frac{1}{4}, g\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ και τον άξονα x΄x.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$και η συνάρτηση

$f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{e \cdot \ln x}{x \cdot \int_{2016}^{2017} g(x)dx}$

Αν ισχύει ότι $\left(\int_{2016}^{2017} g(x)dx\right)^{x} \geq x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να δείξετε ότι $\int_{2016}^{2017} g(x)dx = e$

Μονάδες 4

Γ2. Να δείξετε ότι $f(x) \leq \frac{1}{e}$ για κάθε $x > 0$

Μονάδες 3

Γ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln^2 x + 2\lambda x = 0$, έχει το πολύ μια ρίζα στο $(0, +\infty)$ για κάθε

$\lambda < -\frac{1}{e}$

Μονάδες 4

Γ4. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \alpha$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

Μονάδες 5

Γ5. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, e)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να τέμνει τον x΄x στο σημείο $A(-1, 0)$

Μονάδες 4

Γ6. Αν η αντίστροφη της f στο $(0, e]$ είναι συνεχής να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f^{-1}, τους άξονες x΄x, y΄y και την

ευθεία $x = \frac{1}{e}$ **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ Δ

Έστω f:$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με f(0) = 1 η οποία ικανοποιεί τη σχέση :

$$f'(x) + 1 = 2x(\, f(x) + x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{x^2} - x$, $x \in IR$

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή ,να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της

C_f στο σημείο Α(1 , f(1))

Μονάδες 4

Δ3. Να αποδείξετε ότι $\int_{2016}^{2017} e^{x^2-1} dx \geq 4032$

Μονάδες 5

Δ4.Έστω η συνάρτηση g(x) = F(x) −F(2−x) ,όπου Fείναι αρχική της f

Να μελετήσετε την g ως προς την κυρτότητα

Μονάδες 5

Δ5. Αν x_oπραγματικός αριθμός με $x_o < 1$ τέτοιος ώστε$F(f(x_o)) = 0$ να δείξετε

ότι υπάρχει $\xi \in (x_o , 1)$ τέτοιος ώστε $F\big(f(\xi)\big) = (1-\xi) f\big(f(\xi)\big) \cdot f'(\xi)$

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !