ΘΕΜΑ Β

Έστω $f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}, x\in\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{x}, x\geq 0$

B1 f κυρτότητα – ΣΚ

Λύση

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)'e^x-(x^2+1)(e^x)'}{(e^x)^2}=\frac{2x\cdot e^x-(x^2+1)e^x}{(e^x)^2}$$

$$=\frac{\cancel{e^x}(-x^2+2x-1)}{(e^x)^{\cancel{2}}}=-\frac{(x-1)^2}{e^x}$$

$$f''(x)=-\frac{2(x-1)e^x-(x-1)^2e^x}{(e^x)^2}$$

$$=\frac{e^x(x-1)^2-2(x-1)e^x}{(e^x)^2}$$

$$=\frac{\cancel{e^x}(x-1)[x-1-2]}{(e^x)^{\cancel{2}}}$$

$$=\frac{(x-1)(x-3)}{e^x}$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cup$	ΣΚ	$\cap$	ΣΚ	$\cup$	

Τα σημεία καμπής είναι $\left(1,\frac{2}{e}\right)$, $\left(3,\frac{10}{e^3}\right)$

B2 Ν.δ.ο. η εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το $A(1,0)$ έχει εξίσωση $y=-x+1$

Λύση

Η εξίσωση εφαπτομένης στο $M(x_0,f(x_0))$ είναι $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$$\Leftrightarrow -\frac{x_0^2+1}{\cancel{e^{x_0}}}=-\frac{(x_0-1)^2}{\cancel{e^{x_0}}}(1-x_0)$$

$$\Leftrightarrow (x_0-1)^2(1-x_0)-x_0^2-1=0$$

$$\Leftrightarrow (x_0^2-2x_0+1)(1-x_0)-x_0^2-1=0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x_0^2}-2x_0+\cancel{1}-x_0^3+2x_0^2-x_0-\cancel{x_0^2}-\cancel{1}=0$$

$$\Leftrightarrow -x_0^3+2x_0^2-3x_0=0$$

$$\Leftrightarrow -x_0\underbrace{(x_0^2-2x_0+3)}_{\Delta<0}=0$$

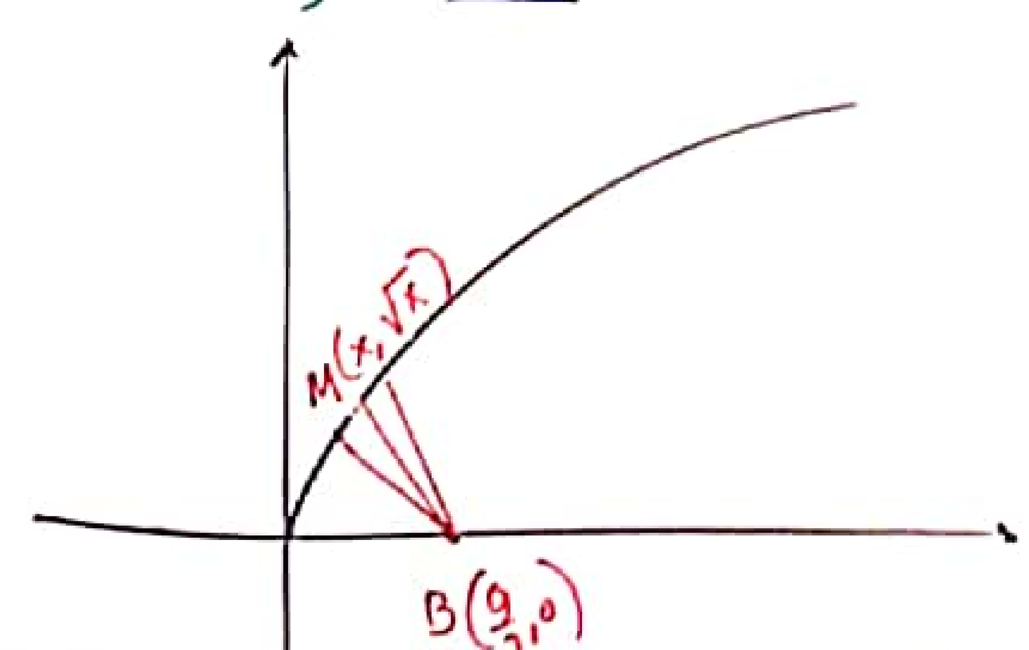
$$\Leftrightarrow x_0=0$$

Άρα $y=-x+1$

B3 Να βρείτε σημείο M της C_g το οποίο έχει ελάχιστη απόσταση από το $B\left(\frac{9}{2},0\right)$

(Άσκηση 8 σελ 152 σχ.)

Λύση



$$BM=\sqrt{\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\sqrt{x}^2}$$

$$=\sqrt{x^2-9x+\frac{81}{4}+x}$$

$$=\sqrt{x^2-8x+\frac{81}{4}}$$

Έστω $h(x)=\sqrt{x^2-8x+\frac{81}{4}}$, $D_h=[0,+\infty)$

$$h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2-8x+\frac{81}{4}}}\cdot(2x-8)$$

$$h'(x)=\frac{x-4}{h(x)}$$

x	0		4		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	ο.ε.	$\nearrow$	

Άρα το σημείο με την ελάχιστη απόσταση είναι το $M(4,2)$

B4 α) Να βρείτε σημείο Λ της C_g στο οποίο η εφαπτομένη είναι κάθετη στην $y=-x+1$

Λύση

Πρέπει $g'(x_1)=1$

$$\frac{1}{2\sqrt{x_1}}=1\Leftrightarrow$$

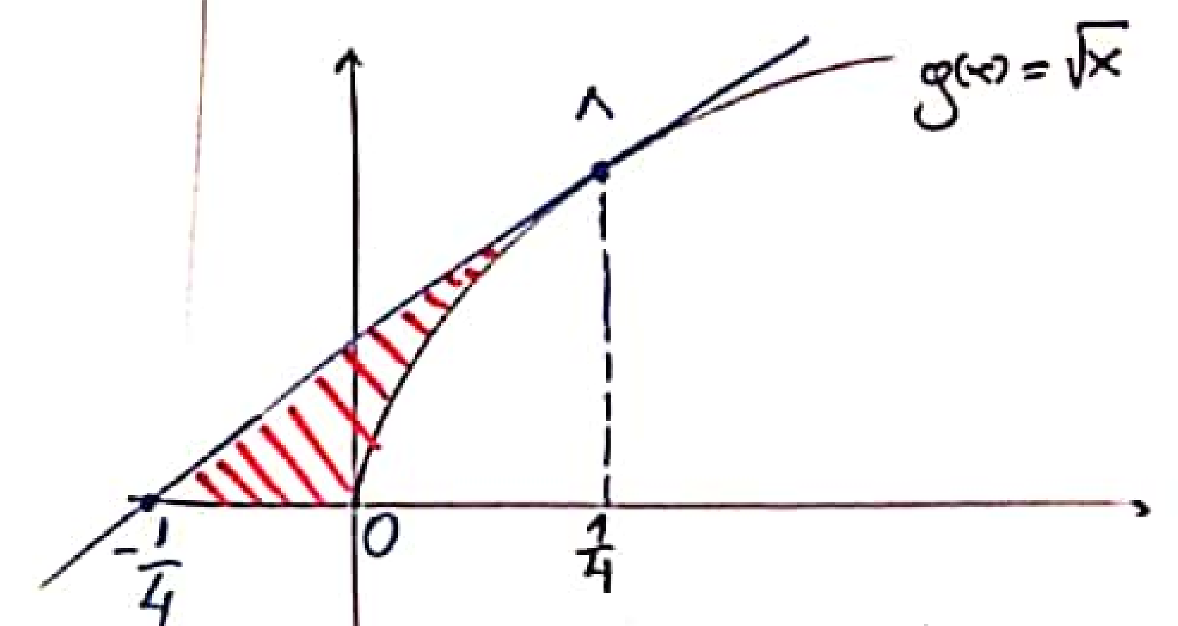
$$\sqrt{x_1}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x_1=\frac{1}{4}$$

$$y-g(x_1)=g'(x_1)(x-x_1)$$

$$\Leftrightarrow y-g\left(\tfrac{1}{4}\right)=g'\left(\tfrac{1}{4}\right)\left(x-\tfrac{1}{4}\right)$$

$$y-\frac{1}{2}=x-\frac{1}{4}\Leftrightarrow$$

$$\boxed{y=x+\frac{1}{4}}\ (\varepsilon)$$



β) E C_g, $x'x$, ε

Λύση

$$E=\int_{-\frac{1}{4}}^{0}\left(x+\frac{1}{4}\right)dx+\int_{0}^{\frac{1}{4}}\left(x+\frac{1}{4}-\sqrt{x}\right)dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{4}}^{0}\left(x+\frac{1}{4}\right)dx+\int_{0}^{1/4}\left(x+\frac{1}{4}\right)dx-\int_{0}^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x}{4}\right]_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}}-\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{4}}=\frac{3}{32}-\frac{1}{32}+\frac{1}{16}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}$$

$$=\frac{1}{24}\ \text{τ.μ.}$$

αλγόριθμος ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής με $g(x)>0 \ \forall x\in\mathbb{R}$

$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\dfrac{e\,\ln x}{x\cdot\int_{2016}^{2017} g(x)\,dx}$

Αν ισχύει ότι $\left(\int_{2016}^{2017} g(x)\,dx\right)^x \geq x+1$

Γ1. Ν.δ.ο. $\int_{2016}^{2017} g(x)\,dx = e$

<u>Λύση</u>

Έστω $\int_{2016}^{2017} g(x)dx = a$ και

ισχύει $a^x \geq x+1 \Leftrightarrow a^x - x - 1 \geq 0$

Έστω $g(x)=a^x-x-1$ με $D_g=\mathbb{R}$

παραγωγίσιμη με $g'(x)=a^x\ln a-1$

Ισχύει $g(x)\geq g(0)$

Η g παρουσιάζει Ο.Ε. για $x=0$

εσωτερικό σημείο του D_g και

από Θ. Fermat $g'(0)=0$

$a^0\cdot\ln a - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \ln a = 1$

$\Leftrightarrow a = e$

Δηλαδή $\int_{2016}^{2017} g(x)dx = e$

Γ2. Να δείξετε ότι $f(x)\leq\frac{1}{e}$, $\forall x>0$

<u>Λύση</u>

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ $\quad D_f=(0,+\infty)$

$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x}$

$f'(x)=0$

$1-\ln x=0$

$\ln x = 1$

$x=e$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

$f(e)=\frac{1}{e}$

Άρα $f(x)\leq\frac{1}{e}$

Γ3. Ν.δ.ο. η εξίσωση $\ln^2 x + 2\lambda x = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $(0,+\infty)$ $\forall\ \lambda<-\frac{1}{e}$

<u>Λύση</u>

Έστω $h(x)=\ln^2 x+2\lambda x$ $\quad D_h=(0,+\infty)$

$h'(x)=2\ln x\cdot\frac{1}{x}+2\lambda$

$h'(x)=2\left(\frac{\ln x}{x}+\lambda\right)$

Ισχύει $\dfrac{\ln x}{x}\leq\dfrac{1}{e}$ από Γ2

$\lambda<-\frac{1}{e}$ +

$h'(x)<0$

$h(x)\downarrow$ στο $(0,+\infty)$ άρα "1-1" και

έχει το πολύ μια ρίζα στο $(0,+\infty)$

Γ4. Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $f(x)=a$.

<u>Λύση</u>

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}\cdot\ln x=-\infty$

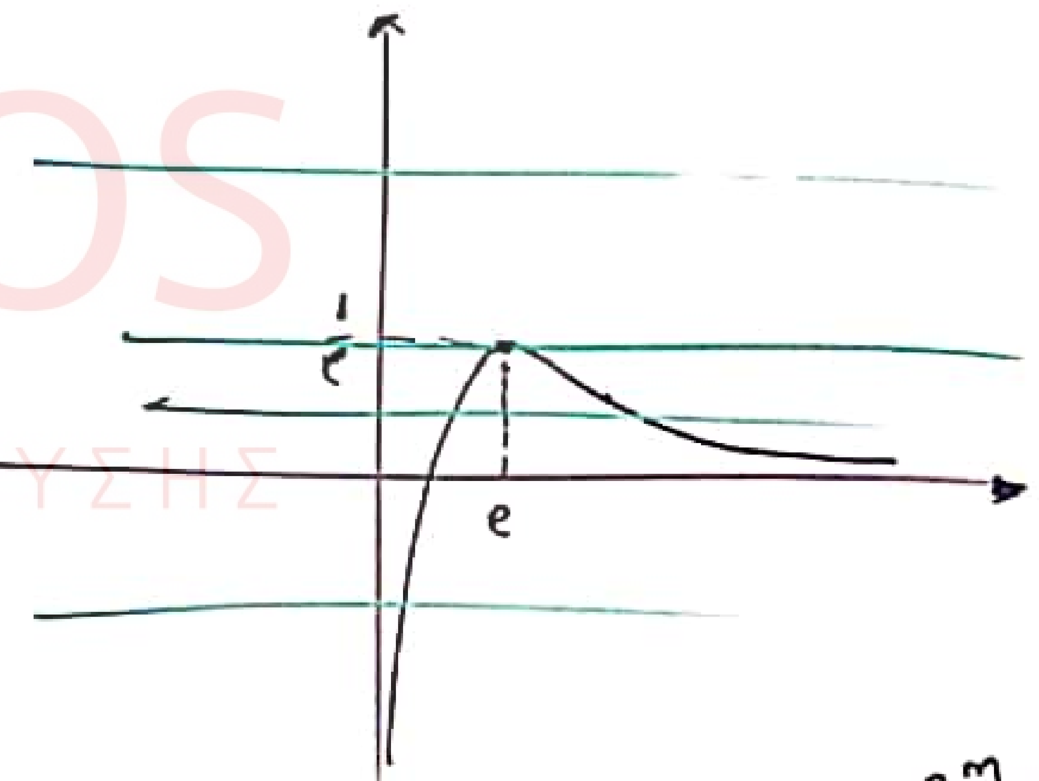
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$

Αν $\Delta_1=(0,e]$ και $\Delta_2=[e,+\infty)$

στο Δ_1 η $f\nearrow$ άρα $f(\Delta_1)=(-\infty,\frac{1}{e}]$

στο Δ_2 η $f\searrow$ άρα $f(\Delta_2)=(0,\frac{1}{e}]$



<u>1η περίπτωση</u>

$a>\frac{1}{e}$ τότε $a\notin f(\Delta_1)$ και $a\notin f(\Delta_2)$

Άρα είναι η εξίσωση αδύνατη

<u>2η περίπτωση</u>

$a=\frac{1}{e}$ τότε μοναδική λύση το $f(e)=\frac{1}{e}$

<u>3η περίπτωση</u>

$0<a<\frac{1}{e}$

$a\in f(\Delta_1)$ άρα $\exists x_1\in\Delta_1: f(x_1)=0$

$a\in f(\Delta_2)$ άρα $\exists x_2\in\Delta_2: f(x_2)=0$

<u>4η περίπτωση</u>

$a<0$

$a\in f(\Delta_1)$ και $a\notin f(\Delta_2)$

Άρα $\exists x_1\in\Delta_1: f(x_1)=0$

αλγόριθμος
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής με $g(x)>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\dfrac{e\ln x}{x\cdot\int_{2016}^{2017} g(x)\,dx}$

Αν ισχύει ότι $\left(\int_{2016}^{2017} g(x)\,dx\right)^x \geq x+1$

Γ5 Ν.α.ο. $\exists\ \xi\in(1,e)$: η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ να τέμνει τον $x'x$ στο $A(-1,0)$

Λύση

Έστω $y-f(\xi)=f'(\xi)\cdot(x-\xi)$

η εξίσωση εφαπτομένης στο M και θα ισχύει.

$$-f(\xi)=f'(\xi)(-1-\xi)$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi)(\xi+1)=f(\xi)$$

Έστω $\varphi(x)=f'(x)\cdot(x+1)-f(x)$

$\varphi(1)=2>0$

$\varphi(e)=f'(e)(e+1)-f(e)=-f(e)=-\frac{1}{e}<0$

$\varphi(1)\varphi(e)<0$. Η φ συνεχής στο $[1,e]$ ως πράξεις συνεχών. Άρα από Θ. Bolzano

$\exists\ \xi\in(1,e):\varphi(\xi)=0$

Γ6. Αν η f^{-1} στο $(0,e]$ συνεχής

E $\quad C_{f^{-1}}$, $x'x$, $x=0$, $x=\frac{1}{e}$

Λύση

Η $f\nearrow$ στο $[1,e]$ άρα και

$f^{-1}\nearrow$ στο $\left[0,\frac{1}{e}\right]$

$f(e)=\frac{1}{e} \qquad f^{-1}(0)=1$

$f(1)=0 \qquad f^{-1}\left(\frac{1}{e}\right)=e$

$$E=\int_0^{\frac{1}{e}} f^{-1}(x)\,dx$$

Θέτω $u=f^{-1}(x)$

$f(u)=x$

$f'(u)\,du=dx$

$$E=\int_1^e u\cdot f'(u)\,du$$

$$E=\int_1^e u\cdot\frac{1-\ln u}{u^2}\,du$$

$$E=\int_1^e \frac{1-\ln u}{u}\,du=\int_1^0 -x\,dx=\int_0^1 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}\ \text{τ.μ.}$$

Θέτω $x=1-\ln u$

$dx=-\frac{1}{u}\,du$

αλγόριθμος
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγ. , $f(0)=1$

η οποία ικανοποιεί τη σχέση.

$$(f'(x)+1)=2x\cdot(f(x)+x)$$

Δ1 Ν.αο. $f(x)=e^{x^2}-x,\ x\in\mathbb{R}$

Λύση

Έστω $g(x)=f(x)+x$.

και ισχύει $g'(x)=2x\cdot g(x)$

$$\Leftrightarrow g'(x)-2x\cdot g(x)=0$$

πολ/ζω με e^{-x^2}

$$g'(x)e^{-x^2}-2x\cdot g(x)e^{-x^2}=0$$

$$\left(g(x)\cdot e^{-x^2}\right)'=0$$

Από Θεώρημα Συνεπειών Μέσης Τιμής

$$g(x)\cdot e^{-x^2}=c$$

$$\Leftrightarrow g(x)=c\cdot e^{x^2}$$

$$\Leftrightarrow f(x)+x=ce^{x^2}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=ce^{x^2}-x$$

για $x=0$ $f(0)=c=1$

Άρα $f(x)=e^{x^2}-x$

Δ2 Ν.αο. η f κυρτή

Λύση

$$f'(x)=e^{x^2}\cdot 2x-1$$

$$f''(x)=e^{x^2}\cdot 4x^2+e^{x^2}\cdot 2=e^{x^2}(4x^2+2)$$

Άρα $f''(x)>0$ και η f κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Ισχύει $f(1)=e-1$, $f'(1)=2e-1$

Η εξίσωση εφαπτομένης είναι.

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)$$

$$\Leftrightarrow y-e+1=(2e-1)(x-1)$$

$$\Leftrightarrow y=(2e-1)x-2e+1+e-1$$

$$\Leftrightarrow y=(2e-1)x-e$$

Δ3 Ν.αο. $\int_{2016}^{2017} e^{x^2-1}\,dx\geq 4032$

Λύση

Ισχύει $f(x)\geq(2e-1)x-e$ γιατί η f κυρτή στο $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow e^{x^2}-x\geq(2e-1)x-e$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2}\geq 2e\cdot x-e$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{x^2}}{e}\geq 2x-1$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2-1}\geq 2x-1$$

Άρα $\int_{2016}^{2017} e^{x^2-1}\,dx\geq\int_{2016}^{2017}(2x-1)\,dx$

$$\Leftrightarrow \int_{2016}^{2017} e^{x^2-1}\,dx\geq\left[x^2-x\right]_{2016}^{2017}$$

$$\left[x^2-x\right]_{2016}^{2017}=\left[x\cdot(x-1)\right]_{2016}^{2017}=2017\cdot2016-2016\cdot2015=2016\cdot(2017-2015)=2016\cdot2=4032$$

αλγόριθμος
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγ., $f(0)=1$

η οποία ικανοποιεί τη σχέση.

$$(f'(x)+1)=2x\cdot(f(x)+x)$$

Δ4. Έστω $g(x)=F(x)-F(2-x)$

να μελετηθεί η g ως προς την κυρτότητα.

Λύση

$$g'(x)=F'(x)-F'(2-x)\cdot(2-x)'$$
$$=F'(x)+F'(2-x)$$
$$=f(x)+f(2-x)$$
$$g''(x)=f'(x)+f'(2-x)\cdot(2-x)'$$
$$g''(x)=f'(x)-f'(2-x)$$

Η f κυρτή άρα η $f'\nearrow$

για $x>2-x \Leftrightarrow f'(x)>f'(2-x)\Leftrightarrow g''(x)>0$

Άρα $x>1 \Leftrightarrow g''(x)>0$

Όταν $x<2-x \Leftrightarrow g''(x)<0$

Άρα $x<1 \Leftrightarrow g''(x)<0$

για $x=1$ $g''(1)=0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\cap$		$\cup$	

αλγόριθμος
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Δ_5. Αν $x_0<1$: $F(f(x_0))=0$ ν.δ.ο. $\exists\ \xi\in(x_0,1)$: $F(f(\xi))=(1-\xi)f(f(\xi))\cdot f'(\xi)$

Λύση

Έστω $h(x)=F(f(x))(x-1)$ συνεχής στο $[x_0,1]$ ως πράξεις συνεχών

και παραγωγίσιμη στο $(x_0,1)$ με $h'(x)=F'(f(x))\cdot f'(x)(x-1)+F(f(x))$
$=f(f(x))\cdot f'(x)\cdot(x-1)+F(f(x))$

Ισχύει $h(x_0)=F(f(x_0))\cdot(x_0-1)=0$
και $h(1)=F(f(1))\cdot 0=0$

$\Bigg\}\ h(x_0)=h(1)$

Από Θ. Rolle $\exists\ \xi\in(x_0,1)$: $h'(\xi)=0$

$\Leftrightarrow F'(f(\xi))\cdot f'(\xi)\cdot(\xi-1)+F(f(\xi))=0$

$\Leftrightarrow F(f(\xi))=(1-\xi)\cdot f(f(\xi))\cdot f'(\xi)$

αλγόριθμος
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ