

Θέμα Α

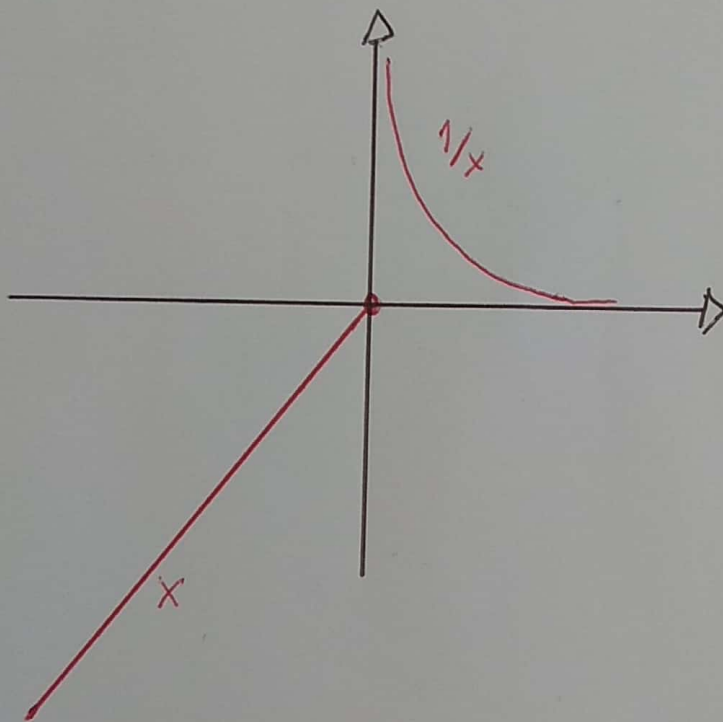
Κωστάκης Γιάννης

Μαθηματικός

A1 σελ 99 . Εξοδικό Βιβλίο

A2 α) Ψευδής

β) Έστω $f(x) = \begin{cases} x & , x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & , x > 0 \end{cases}$



A3 σελ. 216 Εξοδικό Βιβλίο

A4 α) β) γ) δ) ε)
Λ Λ Σ Σ Σ

Θέμα Β

B1 $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

η f είναι παρ/κη ως διαφορά πολωνυμικής και ρατίς

• $f'(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

$\hookrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{8}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2$

$\hookrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{8}{x^3} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 8}{x^3} > 0$.

$$\left. \begin{array}{l} x^3 + 8 = 0 \\ x^3 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \end{array}$$

το πρόσημο της $1 + \frac{8}{x^3}$

δίνεται από τον πίνακα $\rightarrow$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$x^3 + 8$	$-$	0	$+$	$+$
x^3	$-$	$-$	0	$+$
$1 + \frac{8}{x^3}$	$+$	$-$	$+$	

• Επομένως το πρόσημο της $f'(x)$ είναι:

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 0)$

Επομένως από το πρόβλημα μας $f'(x)$ έχω:

• $f'(x) > 0$ $x \in (-\infty, -2)$ τότε $f \nearrow (-\infty, -2)$

• $f'(x) < 0$ $x \in (-2, 0)$ τότε $f \searrow (-2, 0)$

και άρα το $f(-2) = -3$ είναι τοπικό μέγιστο

• $f'(x) > 0$ $x \in (0, +\infty)$ τότε $f \nearrow (0, +\infty)$

Συνοψίζω:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

B2

$$f'(x) = 1 + \frac{8}{x^3}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

είναι παρ/μν ως άθροισμα σταθερής και γιγ.ς.

τότε
$$f''(x) = \frac{-24}{x^4}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

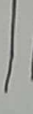
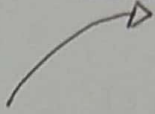
$$\left. \begin{array}{l} x^4 > 0 \\ -24 < 0 \end{array} \right\} \text{ Άρα } f''(x) < 0, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Άρα $f''(x) < 0$ $x \in (-\infty, 0)$ τότε f κοίλη $(-\infty, 0)$

$f''(x) < 0$ $x \in (0, +\infty)$ τότε f κοίλη $(0, +\infty)$

και άρα η f δεν έχει οριζόντια касητή.

Συνοπτικά:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$				

B3

Αφού η f έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ -ξοξ
τότε ελέγχω για κατακόρυφη ασύμμετρη στο 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x - \frac{4}{x^2} = 0 - 4(+\infty) = -\infty$$

Διότι $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4}{x^2} = -4(+\infty) = -\infty$

αφού κοντά στο 0 x^2 θετικό

Επομένως η $f(x)$ έχει κατακόρυφη ασύμμετρη
στην άξονα $y'y : x=0$.

Ελέγχω για οριζόντιες και πλάγιες ασύμμετρες.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{4}{x^2} \right) = (+\infty) - 0 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{4}{x^2} \right) = (-\infty) - 0 = -\infty$$

Άρα δεν έχει οριζόντιες ασύμμετρες.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x} - \frac{4}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{x^3} \right) = 1$$

Apa $\lambda = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{4}{x^3} \right) = 1$$

$\lambda = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{4}{x^3} \right) = 0$$

Apa $\theta = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{4}{x^3} \right) = 0$$

Apa $\theta = 0$

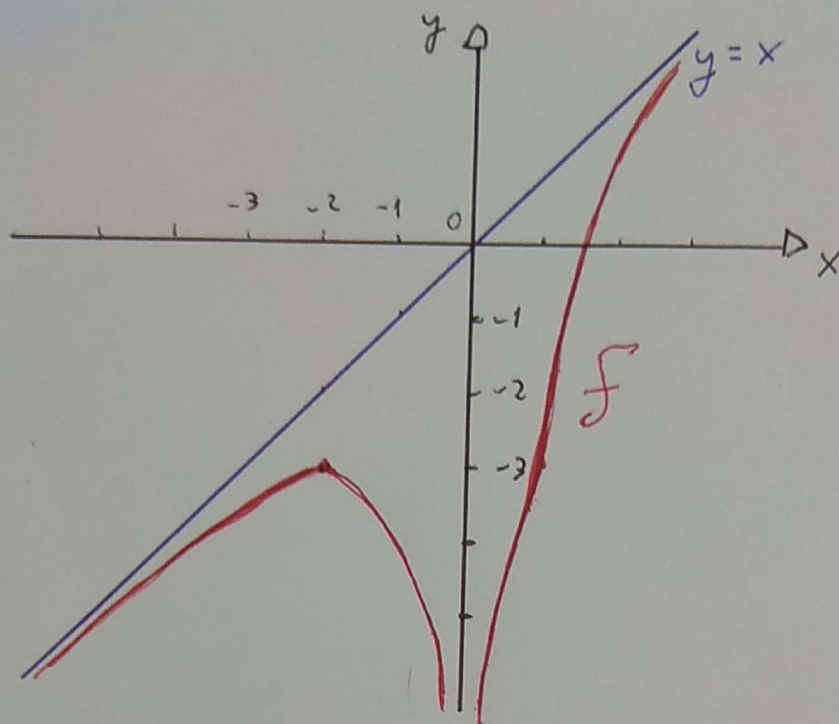
ε-δ / ε-κρίσιμα $y = \lambda x + \theta$

(ε) : $y = x$

Εάν λάβει ως βάση το $f(x)$

κρίνεται για $x \rightarrow +\infty$ και $x \rightarrow -\infty$.

B4

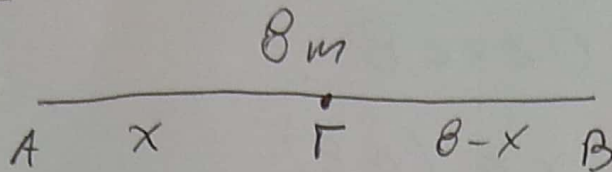


$$f(-2) = -3$$

$$f(1) = -3$$

Θέμα Γ

Γ1



Έστω AB το σήμα και έστω Γ το σημάδι
που κόβουμε σε AG και ΓB το σήμα

Έστω $AG = x$ και $GB = \theta - x$

Για το τετράγωνο έχουμε περίμετρο ίση με $AG = x$

Άρα η πλευρά του $a = \frac{x}{4}$

άρα εμβαδόν του $E_1 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}$

Για τον κύκλο έχουμε περίμετρο ίση με $GB = \theta - x$

Άρα $L = \theta - x \Rightarrow 2\pi \cdot \rho = \theta - x \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho = \frac{\theta - x}{2\pi}$

άρα εμβαδόν $E_2 = \pi \cdot \rho^2 = \pi \cdot \frac{(\theta - x)^2}{4\pi^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow E_2 = \frac{(\theta - x)^2}{4\pi}$

Επομένως

$$E(x) = E_1 + E_2 = \dots = \frac{x^2(4 + \pi) - 64x + 256}{16\pi}$$

Εφόσον το εύρος είναι μικρότερο 8m
και αφού θέλουμε να υπάρχουν 2 κομμάτια.

$$\text{τότε } 0 < x < 8$$

$$\text{Άρα } x \in (0, 8)$$

πεδίο ορισμού της $E(x)$.

Γ2

$E(x)$ παρ/κη ως πολωνομική $x \in (0, 8)$ / & ε

$$\S E'(x) = \frac{2(\pi+4)x - 64}{16\pi}$$

$$\S E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{32}{\pi+4}$$

$$\S E'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{32}{\pi+4}$$

$$\S E'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{32}{\pi+4}$$

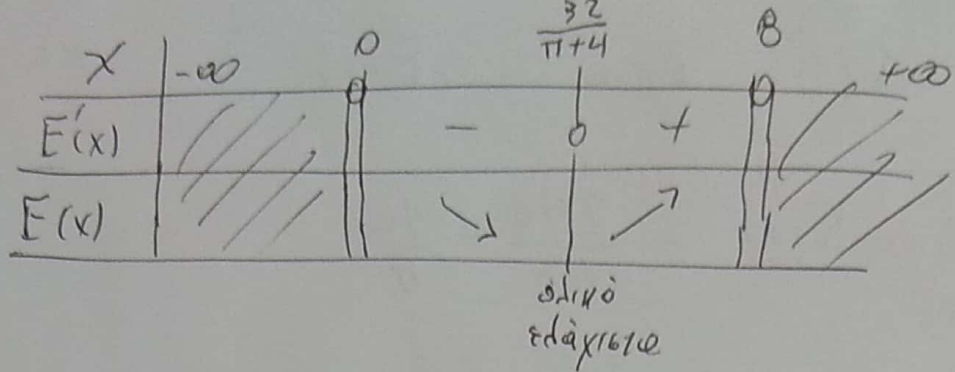
Άρα η $E(x)$ είναι $\nearrow$ για $x \in \left(\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$

και $E(x)$ $\searrow$ για $x \in \left(0, \frac{32}{\pi+4}\right)$

Άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = \frac{32}{\pi+4}$

$$\text{το } f\left(\frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{16}{\pi+4}.$$

Συνολικά:



Άρα το ελάχιστο γίνεται ελάχιστο για $x = \frac{32}{\pi+4}$.

➤ πλευρά
εστραχώνου

$$a = \frac{x}{4} = \frac{8}{\pi+4}$$

➤ διάμετρος
κύκλου

$$\delta = 2 \cdot \rho = 2 \cdot \frac{8-x}{2\pi} = \dots = \frac{8}{\pi+4}$$

Άρα $a = \delta$ για $x = \frac{32}{\pi+4}$

Γ3

Επομένως αρκεί να δοθεί η εξίσωση

$E(x) = 5$ έχει μοναδική ρίζα

$x_0 \in (0, 8)$.

Έστω $\Delta_1 = (0, \frac{32}{\pi+4}]$ και $\Delta_2 = [\frac{32}{\pi+4}, 8)$.

θα βρούμε το $E(\Delta_1)$ και $E(\Delta_2)$.



Ε για Δ_1 έχω $E(x) \searrow \forall x \in$

$$\lim_{x \rightarrow 0} E(x) = \frac{256}{16\pi} = \frac{16}{\pi}$$

$$\text{και } E\left(\frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{16}{\pi+4}$$

$$\text{Αρα } E(\Delta_1) = \left[\frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi} \right)$$

Ε για Δ_2 έχω $E(x) \nearrow \forall x \in$

$$\lim_{x \rightarrow 8} E(x) = \frac{(\pi+4)8^2 - 64 \cdot 8 + 256}{16\pi} = 4.$$

$$\text{Αρα } E(\Delta_2) = \left[\frac{16}{\pi+4}, 4 \right).$$

Ε Παρατηρούμε ότι $5 \notin E(\Delta_2)$

και ότι $5 \in E(\Delta_1)$ άρα

υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \Delta_1 \subseteq (0, 8)$

ώστε $E(x_0) = 5$ άρα $E(x)$ είναι $\searrow$

στο Δ_1 άρα το x_0 θα είναι μοναδικό.

Θέμα Α

Κυριακή 10 Γιώργος

Μαθηματικά

Α1

$$f'(x) = 2e^{x-a} - 2x$$

$$f''(x) = 2(e^{x-a} - 1)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow e^{x-a} = 1 \Rightarrow x = a$$

Άρα έχει μοναδικό οριζόντιο καμπύλις στο $x = a$

$$\text{το } f(a) = 2 - a^2$$

$$A(0, 2 - a^2)$$

Συνοπτικά

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$+$
$f(x)$		$\cap$	$\cup$

Α2

Άρα $f'(x) \searrow (-\infty, a]$ και $f' \nearrow [a, +\infty)$

$$f'(a) = 2(1-a) < 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Επομένως η f' έχει 2 ακριβώς ρίζες

$$x_1 < a \text{ και } x_2 > a$$

Συνοπτικά:

x	$-\infty$	x_1	a	x_2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
		τοπικό μέγιστο		τοπικό ελάχιστο	

Δ3

Έστω (a, x_2) $f \searrow$ ορα 1-1

και $x > a > 1$

λογίζε $f(x) < f(1)$

αρα $f(x) \neq f(1)$

Δ4

Έχουμε $f(x) = 2e^{x-2} - x^2$ $x \in [2, 3]$

Εσ. f κυρτή στο $[2, 3]$

Ε. Εφαρμογή της C_f στο $(2, f(2))$
 $(2, -2)$

Έχει εξίσωση $\boxed{(\varepsilon): y = -2x + 2}$

και $\lambda = f'(2) = -2$

Ε. f κυρτή άρα

$\boxed{f(x) \geq -2x + 2}$ (I)

η ισότητα ισχύει μόνο για $x=2$.

Επίσης

$$\boxed{\sqrt{x-2} \geq 0} \quad \textcircled{\text{II}}$$

160777α 16x034
μόνο για $x=2$

Άρα από $\textcircled{\text{I}}$ και $\textcircled{\text{II}}$

$$\boxed{f(x) \cdot \sqrt{x-2} \geq (-2x+2) \sqrt{x-2}}$$

συνεχές συναρτήσεις και 160777α μόνο
για $x=2$.

$$\text{Άρα} \quad \int_2^3 f(x) \sqrt{x-2} \, dx > \underbrace{\int_2^3 (-2x+2) \sqrt{x-2} \, dx}_J$$

Υπολογισμός του ολοκληρώματος J

Θέτουμε $\sqrt{x-2} = u$ τότε :

$$J = \int_0^1 (-2 \cdot (u^2+1) \cdot u \cdot 2u) \, du = -4 \int_0^1 (u^4 + u^2) \, du$$

$$= -4 \left[\frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} \right]_0^1 = -4 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) = \frac{-32}{15}$$

$$\text{Άρα} \quad \boxed{\int_2^3 f(x) \sqrt{x-2} \, dx > \frac{-32}{15}}$$