ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ (Α.Α.Τ.)

Εξισώσεις Α.Α.Τ. (χωρίς αρχική φάση)	$x = A\eta\mu\omega t$ $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\omega t$ $\quad \upsilon_{max} = \omega A$ $a = -a_{max}\eta\mu\omega t$ $\quad \alpha_{max} = \omega^2 A$ Σχέση επιτάχυνσης – απομάκρυνσης $\alpha = -\omega^2 \cdot x$
Εξισώσεις Α.Α.Τ. (με αρχική φάση)	$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o)$ $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_o)$ $\quad \upsilon_{max} = \omega A$ $a = -a_{max}\eta\mu(\omega t + \varphi_o)$ $\quad \alpha_{max} = \omega^2 A$ Σχέση επιτάχυνσης – απομάκρυνσης $\alpha = -\omega^2 x$
Δύναμη στην Α.Α.Τ. (Δύναμη επαναφοράς)	Σώμα εκτελεί ΑΑΤ $\Leftrightarrow$ $F = -Dx$ όπου $D = m\omega^2$ και x =*απομάκρυνση από τη ΘΙ*
Προσοχή στην προηγούμενη σχέση $F = F_{επαναφοράς} = \Sigma F$ *που ασκούνται στο σώμα που εκτελεί ΑΑΤ*	
Περίοδος Α.Α.Τ.	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$, $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$
	Ενέργεια στην Α.Α.Τ.
Δυναμική ενέργεια	$U = \frac{1}{2}Dx^2$
Κινητική ενέργεια	$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2$
Ολική ενέργεια	$E = \frac{1}{2}DA^2 = U_{max} = \frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2 = K_{max}$

Δυναμική ενέργεια σε συνάρτηση με το χρόνο (Χωρίς $φ_o$)	$U=\frac{1}{2}DA^2ημ^2ωt$ ή $U=Eημ^2ωt$
Κινητική ενέργεια σε συνάρτηση με το χρόνο	$K=\frac{1}{2}DA^2συν^2ωt$ ή $K=Eσυν^2ωt$
Κινητική ενέργεια σε συνάρτηση με την απομάκρυνση	$\Rightarrow$ $K=E-\frac{1}{2}Dx^2$
Δυναμική ενέργεια σε συνάρτηση με την ταχύτητα	$\Rightarrow$ $U=E-\frac{1}{2}mυ^2$

Αρχή διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης	**ΑΔΕΤ**
Σε μια τυχαία θέση	$K + U = E = \frac{1}{2} DA^2 =$ σταθερή
Σε δύο τυχαίες θέσεις	$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 =$ σταθερή
Από την ΑΔΕΤ **<u>με απόδειξη</u>** έχω	$υ=\pm ω\sqrt{A^2-x^2}$ **και** $a=\pm ω\sqrt{υ_{max}^2-υ^2}$
ΡΥΘΜΟΙ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ	
Ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας	$\frac{dK}{dt}=\frac{dW_{ΣF}}{dt}=\frac{ΣF\cdot dx}{dt}=\pm\ ΣF\cdot υ$
Ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας	$\frac{dU}{dt}=-\frac{dK}{dt}$
Ρυθμός μεταβολής της μετατόπισης Ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας Ρυθμός μεταβολής της ορμής	$\frac{dx}{dt}=υ$, $\frac{dυ}{dt}=α$, $\frac{dp}{dt}=ΣF$
Ποσοστό *<u>μεταβολής</u>* φυσικού μεγέθους	$π\%=\frac{τελική\ τιμή-αρχική\ τιμή}{αρχική\ τιμή}\cdot 100\%$

ΕΛΑΤΗΡΙΑ	
Νόμος του Hook	$\boldsymbol{F_{\varepsilon\lambda}=k\cdot\Delta\ell}$ $\Delta\ell$ = απόσταση από τη ΘΦΜ ή $\Delta\ell$ = επιμήκυνση ή συσπείρωση του ελατηρίου
Δυναμική ενέργεια του ελατηρίου	$\boldsymbol{U_{\varepsilon\lambda}=\frac{1}{2}k}\cdot\Delta\ell^2$
Έργο της δύναμης του ελατηρίου	$W_{F\varepsilon\lambda}=U_{\alpha\rho\chi}^{\varepsilon\lambda}-U_{\tau\varepsilon\lambda}^{\varepsilon\lambda}$
Έργο της δύναμης του βάρους	$W_W=U_{\alpha\rho\chi}^{\beta\alpha\rho}-U_{\tau\varepsilon\lambda}^{\beta\alpha\rho}$
Βαρυτική δυναμική ενέργεια	$U_{\beta\alpha\rho}=mgh$
Προσοχή επειδή η δύναμη $F_{\varepsilon\pi\alpha\nu\alpha\varphi o\rho\acute{\alpha}\varsigma}$ είναι συντηρητική δύναμη,όπως το βάρος W και η $\boldsymbol{F_{\varepsilon\lambda}}$,το έργο της υπολογίζεται με τον ίδιο τρόπο	$W_{F\varepsilon\pi\alpha\nu\alpha\phi}=U_{\alpha\rho\chi}^{\tau\alpha\lambda\acute{\alpha}\nu\tau\omega\sigma\eta\varsigma}-U_{\tau\varepsilon\lambda}^{\tau\alpha\lambda\acute{\alpha}\nu\tau\omega\sigma\eta\varsigma}$ ή με τη χρήση του ΘΜΚΕ $W_{F\varepsilon\pi\alpha\nu\alpha\phi}=K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi}$

▶ Κάθε ελατήριο θεωρείται ιδανικό δηλαδή αμελητέας μάζας ($m_{\varepsilon\lambda}=0$) και ότι υπόκειται σε ελαστικές παραμορφώσεις.

▶ Στις ασκήσεις με ελατήρια πάντα σχεδιάζουμε το ελατήριο

① στη ΘΦΜ,
② μετά στη ΘΙ,
③ στην τυχαία θέση ΤΘ , αν θέλουμε να δείξουμε ότι εκτελεί ΑΑΤ,
④ στην νέα θέση ισορροπίας ΝΘΙ (εφόσον έχω αλλαγή της ΘΙ μετά από πλαστική κρούση ή διάσπαση και το ελατήριο είναι κατακόρυφο ή σε κεκλιμένο επίπεδο) ,
⑤ και σε οποιαδήποτε άλλη θέση μου λέει το πρόβλημα (π.χ. εκτρέπω το σώμα από τη ΘΙ στη ΘΦΜ και το αφήνω ελεύθερο, οπότε η ΘΦΜ είναι ταυτόχρονα και ακραία θέση της ΑΑΤ που ακολουθεί).

!

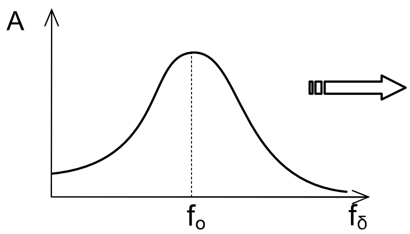
ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ	
Πίεση p: 1Pa =1 N/m^2	$p=\frac{dF}{dA}$
Θεμελιώδης νόμος της υδροστατικής	$p = \rho g h$
Πίεση σε σημείο υγρού που ισορροπεί	$\boldsymbol{p=p_{\varepsilon\xi}+\rho g h}$
Υδραυλικός ανυψωτήρας	$\frac{F_1}{A_1}=\frac{F_2}{A_2}$
Παροχή Π: 1 m^3/s	$\Pi=\frac{\Delta V}{\Delta t}$ ή $\Pi=A\cdot\upsilon$
Αρχή διατήρησης της ύλης	Η μάζα Δm_1 του ρευστού που περνάει από μία διατομή A_1 του σωλήνα σε χρονικό διάστημα Δt θα είναι ίση με τη μάζα Δm_2 του ρευστού που περνάει στο ίδιο χρονικό διάστημα Δt από μία άλλη διατομή του σωλήνα A_2. $\boldsymbol{\Delta m_1 = \Delta m_2}$
Εξίσωση της συνέχειας	Στη στρωτή ροή ενός ασυμπιεστου ρευστού η παροχή παραμένει ασταθερή. Δηλαδή: $\boldsymbol{\Pi_1=\Pi_2 \Rightarrow A_1\cdot\upsilon_1=A_2\cdot\upsilon_2}$ (είναι άμμεση συνέχεια της αρχής διατήρησης της ύλης)
Εξίσωση του Bernoulli	$\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2+\rho g h_1+P_1=\frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2+\rho g h_2+P_2$ **ή** $\boldsymbol{\frac{1}{2}\rho\upsilon^2+\rho g h+P=\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}}$
Θεώρημα του Torricelli	$\upsilon_B=\sqrt{2gh}$ **(με απόδειξη)**
Ροόμετρο του Ventouri	$\upsilon_1=\sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2-1}}$ **(με απόδειξη)**
Συντελεστής ιξώδους **η** μονάδα: 1 N·s/m^2 στο S.I. Πρακτική μονάδα μέτρησης: 1 Poise (πουάζ)=1 dyn·s/cm^2	
Εσωτερική τριβή (ιξώδες) $F=nA\frac{\upsilon}{\ell}$	

ΦΘΙΝΟΥΣΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Δύναμη αντίστασης	$F' = -b\upsilon$
Συνισταμένη δύναμη	$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \vec{F}_{\alpha\nu\tau} + \vec{F}_{\varepsilon\pi\alpha\nu\alpha\varphi} = m\vec{a} \rightarrow \quad -b\upsilon - Dx = ma$
Μείωση πλάτους	$\boxed{A = A_o e^{-\Lambda t}}$ αν $t = nT$ ο λόγος δύο διαδοχικών μέγιστων απομακρύνσεων είναι σταθερός : $\frac{A_o}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = ... = \frac{A_{n-1}}{A_n} = \frac{A_n}{A_{n+1}} = ... = \sigma\tau\alpha\theta.$
Ενέργεια της φθίνουσας ταλάντωσης	$E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}D\left(A_0 e^{-\Lambda t}\right)^2 = \frac{1}{2}DA_0^2\left(e^{-\Lambda t}\right)^2 \rightarrow \boxed{E = E_0 e^{-2\Lambda t}}$
Χρόνος υποδιπλασιασμού ή ημιζωής	$A = A_0 e^{-\Lambda t} \rightarrow \frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\Lambda t_{1/2}} \rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\Lambda t_{1/2}} \rightarrow e^{\Lambda t_{1/2}} = 2 \rightarrow \Lambda t_{1/2} = \ln 2 \rightarrow$ $\boxed{t_{1/2} = \frac{\ell n 2}{\Lambda}}$

Εξαναγκασμένη Ταλάντωση

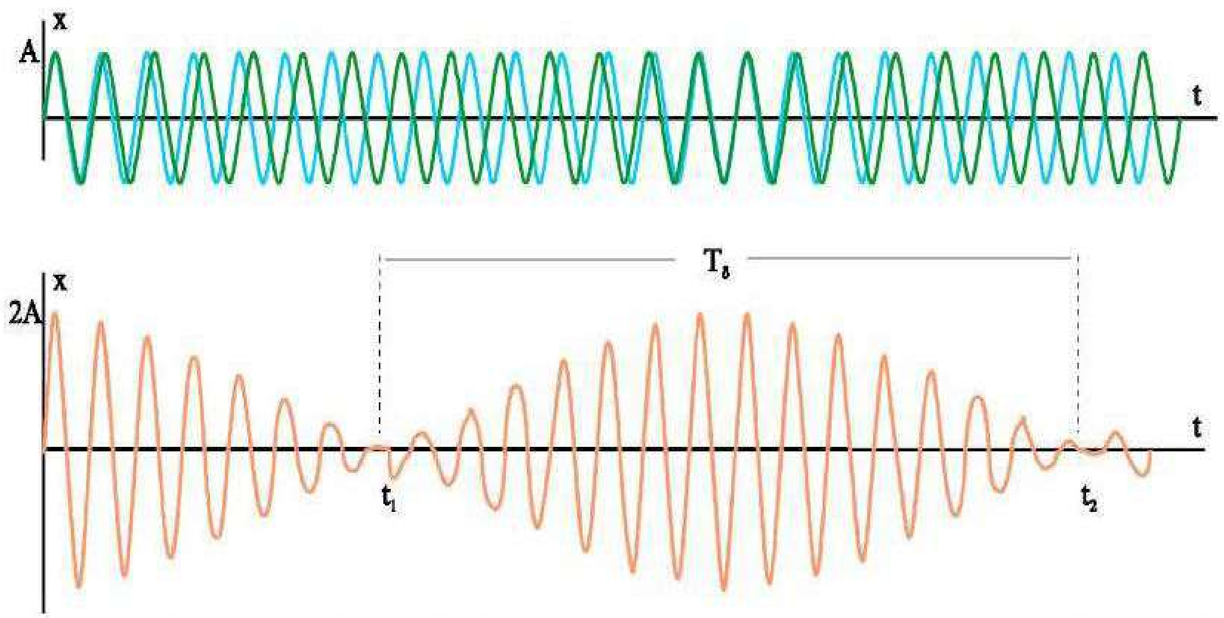
Ένα σύστημα κάνει εξαναγκασμένη ταλάντωση όταν δρα πάνω του μία εξωτερική περιοδική δύναμη (διεγέρτης). Στην εξαναγκασμένη ταλάντωση το σύστημα έχει την συχνότητα f_δ του διεγέρτη και όχι την ιδιοσυχνότητά του f_o δηλαδή την συχνότητα της ελεύθερης ταλάντωσης. $\boldsymbol{f = f_{\delta\iota\varepsilon\gamma\acute{\varepsilon}\rho\tau\eta}}$

Συντονισμός	 Καμπύλη συντονισμού $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{f_{\delta\iota\varepsilon\gamma\acute{\varepsilon}\rho\tau\eta} = f_o}$ οπότε A = μέγιστο

Ιδιοσυχνότητα αρμονικού ταλαντωτή: $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}$

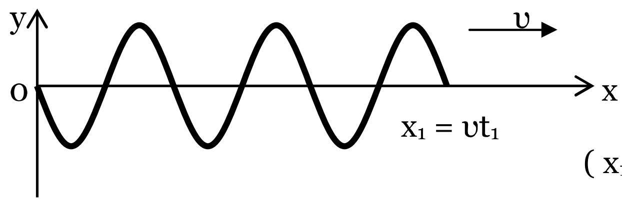
ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

Σύνθεση δύο Α.Α.Τ. της ίδιας συχνότητας, που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο στην ίδια διεύθυνση.	Αρχή της επαλληλίας : $x = x_1 + x_2$ $x_1 = A_1 ημωt$ & $x_2 = A_2 ημ(ωt+φ)$ $A=\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2συνφ}$ $εφθ = \frac{A_2 ημφ}{A_1 + A_2 συνφ}$ τότε για τη συνισταμένη κίνηση: $x = A\ ημ(ωt+θ)$
Σύνθεση δύο Α.Α.Τ. της ίδιας διεύθυνσης, γύρω από το ίδιο σημείο με το ίδιο πλάτος και διαφορετικές συχνότητες (Διακροτήματα)	$x_1 = A ημω_1 t$ & $x_2 = A ημω_2 t$ $x = 2Aσυν(\frac{ω_1 - ω_2}{2}t)ημ(\frac{ω_1+ω_2}{2}t)$ αν $ω_1 \approx ω_2 \approx \overline{ω}$ $x = A' ημ\overline{ω}t$ συχνότητα διακροτήματος $f_δ = \lvert f_1 - f_2 \rvert$
αν $ω_1 \approx ω_2 \approx \overline{ω}$ για τη συνισταμένη κίνηση ισχύει:	$\boxed{ω = \frac{ω_1+ω_2}{2}} \to 2πf_{κιν} = \frac{2πf_1 + 2πf_2}{2} \to \boxed{f_{κιν} = \frac{f_1+f_2}{2}}$ $T_{κιν} = \frac{1}{f_{κιν}}$ άρα $\boxed{T_{κιν} = \frac{2}{f_1+f_2}}$



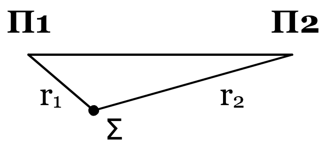
Σχ. 1.37 Από τη σύνθεση δύο ταλαντώσεων που οι συχνότητές τους διαφέρουν πολύ λίγο (πράσινη και μπλε γραμμή) προκύπτει ιδιόμορφη περιοδική κίνηση (κόκκινη γραμμή) που παρουσιάζει διακροτήματα.

ΜΗΧΑΝΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

Ταχύτητα διάδοσης κύματος	$\upsilon = \frac{x}{t}$ — θεμελιώδης εξίσωση της κυματικής $\upsilon = \lambda f$ — Άρα $\upsilon = \frac{\lambda}{T}$
Εξίσωση ταλάντωσης της αρχής Ο (χωρίς φ_o)	$y = A\eta\mu\omega t$
Εξίσωση του αρμονικού κύματος	$y = A\,\eta\mu\,2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ διάδοση προς τα θετικά $y = A\,\eta\mu\,2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$ διάδοση προς τ' αρνητικά
Η ταχύτητα και η **επιτάχυνση** της **ταλάντωσης** ενός οποιουδήποτε σωματιδίου του μέσου διάδοσης ενός κύματος	$\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ ή $\boldsymbol{\upsilon = \pm\,\omega\sqrt{A^2 - y^2}}$ $\alpha = -\omega^2 A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ ή $\boldsymbol{\alpha = -\omega^2 y}$
Φάση **φ** ενός κύματος που διαδίδεται στον θετικό ημιάξονα	$\boldsymbol{\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)}$
Κύμα με αρχική φάση (πηγή $y = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$)	$\boldsymbol{y = A\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_o\right]}$
Διαφορά φάσης Δφ της ταλάντωσης μεταξύ δύο τυχαίων σημείων του μέσου που απέχουν μεταξύ τους απόσταση Δx, την ίδια χρονική στιγμή t: $\boldsymbol{\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda}}$	Η μεταβολή της φάσης ενός σημείου του μέσου δύο χρονικές στιγμές που διαφέρουν κατά Δt $\Delta\varphi = \omega\cdot\Delta t \Rightarrow$ $\boldsymbol{\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta t}{T}}$
Στιγμιότυπο του κύματος (*για t=t₁*)	$y = A\eta\mu 2\pi\left(\sigma\tau\alpha\theta - \frac{x}{\lambda}\right)$
$\boxed{t_1}$	 ($x_1 = 12\lambda/4 = 3\lambda$)

ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

Απομάκρυνση των σημείων του μέσου



Αρχή της επαλληλίας : $y = y_1 + y_2$

- Για $0 \le t < t_1 = \dfrac{r_1}{\upsilon}$ είναι **y = 0**
- Για $t_1 \le t < t_2 = \dfrac{r_2}{\upsilon}$ είναι $\mathbf{y = A\eta\mu 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{r_1}{\lambda}\right)}$
- Για $t \ge t_2$ είναι $\mathbf{y = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\dfrac{r_1 - r_2}{2\lambda}\,\eta\mu 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right)}$

τότε έχω συμβολή και των δύο κυμάτων στο σημείο Σ.

Εξίσωση απομάκρυνσης ενός σημείου στο οποίο συμβάλλουν δύο σύγχρονα αρμονικά κύματα, διαφορετικής διεύθυνσης

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\,\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right)$$

Όπως βλέπουμε η σχέση αυτή παριστάνει Α.Α.Τ. με πλάτος Α' και φάση :

$\varphi = 2\pi\left(\dfrac{\mathbf{t}}{\mathbf{T}} - \dfrac{\mathbf{r_1 + r_2}}{\mathbf{2\lambda}}\right)$

$$y = A'\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right)$$

όπου $A' = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\dfrac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right)$ και $|A'|$ το

πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Σ.

Ταχύτητα και επιτάχυνση των σημείων του μέσου

- Για $0 \le t < t_1 = \dfrac{r_1}{\upsilon}$ είναι $\upsilon = 0$ και $\alpha = 0$
- Για $t_1 \le t < t_2 = \dfrac{r_2}{\upsilon}$ είναι $\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{r_1}{\lambda}\right)$
- Για $t \ge t_2$ είναι $\upsilon = \omega A'\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right)$ και

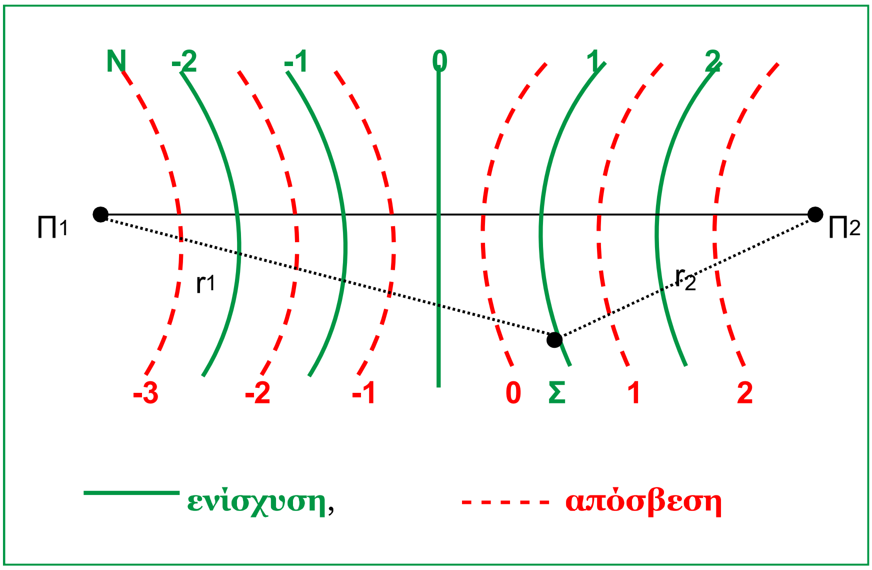
$\alpha = -\omega^2 y = -\omega^2 A'\ \eta\mu\ 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right)$

Ενίσχυση έχω όταν ⇒ $r_1 - r_2 = N\lambda$ όπου $N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Απόσβεση έχω όταν ⇒ $r_1 - r_2 = (2N + 1)\dfrac{\lambda}{2}$ όπου $N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Υπερβολές ενισχυτικής και ακυρωτικής συμβολής

Όλα τα σημεία ενισχυτικής και ακυρωτικής συμβολής βρίσκονται πάνω σε υπερβολές όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα:



Όπως παρατηρούμε από το σχήμα ο αριθμός των υπερβολών ενίσχυσης που τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα $Π_1Π_2$ είναι **περιττός**, ενώ ο αντίστοιχος αριθμός των υπερβολών απόσβεσης είναι **ζυγός**.

ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ

Αρχή της επαλληλίας : $y = y_1 + y_2$

Εξίσωση του στάσιμου κύματος	$y = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{x}{\lambda}\eta\mu 2\pi\frac{t}{T}$
Ταχύτητα και επιτάχυνση των σημείων του μέσου	$\upsilon = \omega A'\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi t}{T}$ $\alpha = -\omega^2 A'\eta\mu\frac{2\pi t}{T}$ όπου $A' = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}$
Θέσεις Κοιλιών	$x = K\frac{\lambda}{2}$ όπου $K = 0,1,2,.....$
Θέσεις Δεσμών	$x = (2K+1)\frac{\lambda}{4}$ όπου $K = 0,1,2,.....$
Διαφορά φάσης των διαφόρων σημείων του μέσου	▸ **<u>ανάμεσα</u>** <u>σε δύο διαδοχικούς δεσμούς</u> ή όταν <u>μεταξύ δύο σημείων</u> **<u>δεν υπάρχει</u>** <u>δεσμός</u> ή υπάρχει **<u>άρτιος αριθμός δεσμών</u>** : **$\Delta\varphi = 0$** ▸ **<u>εκατέρωθεν</u>** <u>ενός δεσμού</u> ή αν <u>μεταξύ των σημείων</u> **<u>υπάρχει περιττός αριθμός δεσμών</u>** : **$\Delta\varphi = \pi$ rad**

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

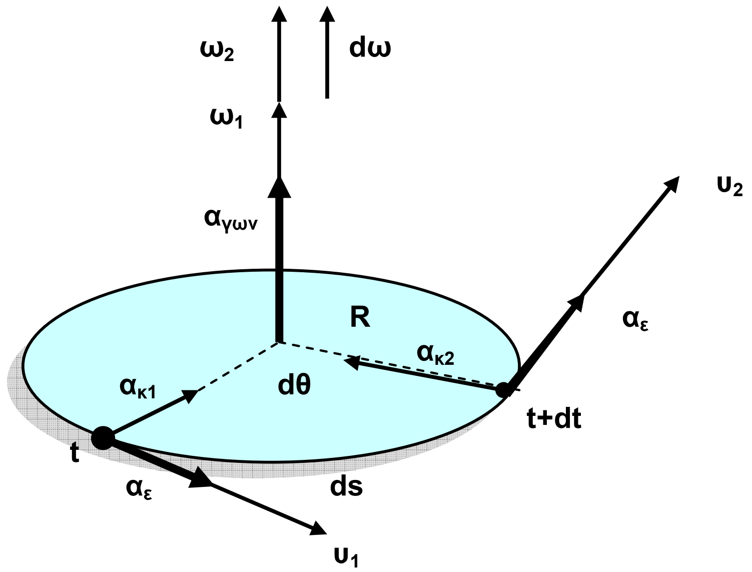
ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Γραμμικά μεγέθη:

1. **Γραμμική ταχύτητα υ:** Εκφράζει το ρυθμό διαγραφής των τόξων: $\upsilon = \frac{ds}{dt}$ (1).
2. **Επιτρόχιος επιτάχυνση α_ε:** Εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας: $\alpha_\varepsilon = \frac{d\upsilon}{dt}$ (2).
3. **Κεντρομόλος επιτάχυνση α_κ :** Είναι υπεύθυνη για την αλλαγή της διεύθυνσης της γραμμικής ταχύτητας υ: $\alpha_\kappa = \frac{\upsilon^2}{r} = \omega^2 r$ (3).

Γωνιακά μεγέθη:

1. **Γωνιακή ταχύτητα ω:** Εκφράζει το ρυθμό διαγραφής των γωνιών: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ (4).
2. **Γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu}$:** Εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας ω : $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt}$ (5).



Γωνιακή ταχύτητα	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
Γραμμική ταχύτητα	$\upsilon = \frac{ds}{dt}$
Σχέση γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας	$\upsilon = \frac{ds}{dt} = \frac{d(\theta R)}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = \omega R$
Γωνιακή επιτάχυνση	$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt}$

Γραμμική επιτάχυνση	$\alpha = \sqrt{\alpha_\kappa^2 + \alpha_\varepsilon^2}$
Κεντρομόλος επιτάχυνση	$\alpha_\kappa = \dfrac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R$
Επιτρόχια επιτάχυνση	$\alpha_\varepsilon = \dfrac{d\upsilon}{dt}$
Σχέση επιτρόχιας και γωνιακής επιτάχυνσης	$a_{\varepsilon\pi} = \dfrac{d\upsilon}{dt} = \dfrac{d(\omega R)}{dt} = \dfrac{d\omega}{dt} R = a_{\gamma\omega\nu} R$
Ομαλή στροφική κίνηση	$\alpha_{\gamma\omega\nu} = 0$, $\omega = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$, $\Delta\theta = \omega\Delta t$
Ομαλά μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση	$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$, $\omega = \omega_o \pm \alpha_{\gamma\omega\nu} t$, $\Delta\theta = \omega_o t \pm \dfrac{1}{2} a_{\gamma\omega\nu} t^2$
Κύλιση τροχού	$\upsilon_{cm} = \upsilon_{\pi\varepsilon\rho} = \omega R$, $a_{cm} = a_{\pi\varepsilon\rho} = a_{\gamma\omega\nu} R$
Ροπή δύναμης	$\tau = Fl$
Ροπή ζεύγους δυνάμεων	$\tau = Fd$
Ισορροπία στερεού σώματος	$\Sigma\vec{F} = \vec{o} \Leftrightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = o \\ \Sigma F_y = o \end{cases}$ και: $\Sigma\vec{\tau} = 0$
Ροπή αδράνειας	$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots.$
Θεώρημα **Steiner**	$I_p = I_{cm} + Md^2$
Θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης	$\Sigma\tau = Ia_{\gamma\omega\nu}$
Στροφορμή υλικού σημείου	$L = pr$ ή $L = m\upsilon r$
Στροφορμή στερεού σώματος	$L = I\omega$
Στροφορμή συστήματος σωμάτων	$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \ldots$

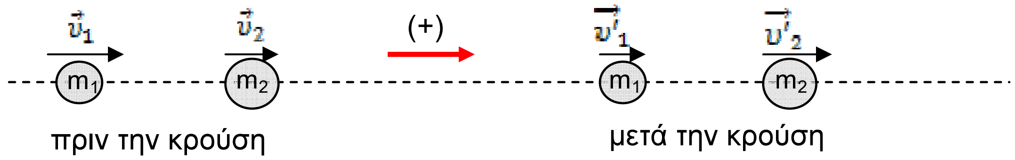
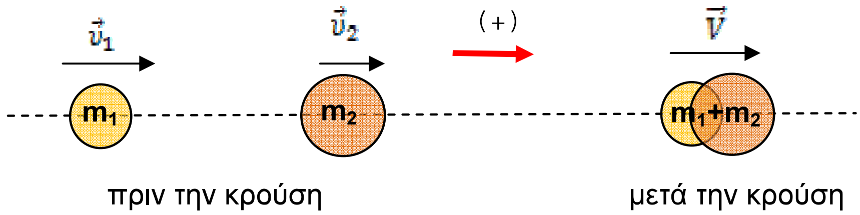
Θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης (Γενικότερη διατύπωση)	$\Sigma\tau = \dfrac{dL}{dt}$
Θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης για σύστημα σωμάτων	$\Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = \dfrac{dL_{\sigma\upsilon\sigma\tau}}{dt}$
Διατήρηση της στροφορμής	Αν $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = 0 \Rightarrow \vec{L}$ = σταθερή άρα $\vec{L}_{\alpha\rho\chi} = \vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda}$ ή $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$
Κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής	$K = \dfrac{1}{2}I\omega^2$
Κινητική ενέργεια στη σύνθετη κίνηση	$K = \dfrac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \dfrac{1}{2}I\omega^2$
Έργο ροπής για στοιχειώδη γωνιακή μετατόπιση	$dW = \tau \cdot d\theta$
Έργο σταθερής ροπής	$W = \tau\theta$
Ισχύς μιας δύναμης	$P = \tau\omega$
Θ.Μ.Κ.Ε.	$\Sigma W = \dfrac{1}{2}I\omega_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \dfrac{1}{2}I\omega_{\alpha\rho\chi}^2$
Ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας στη μεταφορική κίνηση	$\left(\dfrac{dK}{dt}\right)_{\mu\varepsilon\tau} = \Sigma F \cdot \upsilon_{cm}$
Ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας στη στροφική κίνηση	$\left(\dfrac{dK}{dt}\right)_{\sigma\tau\rho} = \Sigma\tau \cdot \omega = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \omega$
Ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας στη σύνθετη κίνηση	$\dfrac{dK}{dt} = \left(\dfrac{dK}{dt}\right)_{\mu\varepsilon\tau} + \left(\dfrac{dK}{dt}\right)_{\sigma\tau\rho} = \Sigma F \cdot \upsilon_{cm} + \Sigma\tau \cdot \omega$

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΗΣ ΚΥΛΙΣΗΣ ΧΩΡΙΣ ΟΛΙΣΘΗΣΗ

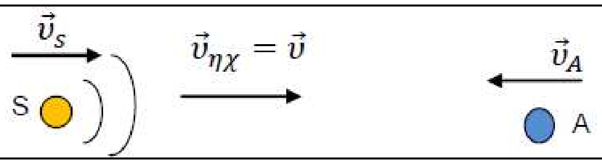
αντιστοιχίσεις

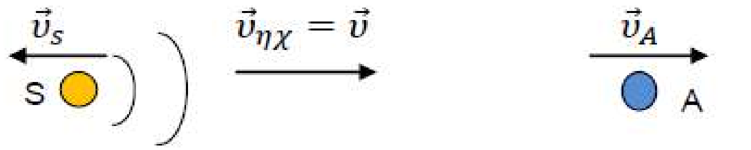
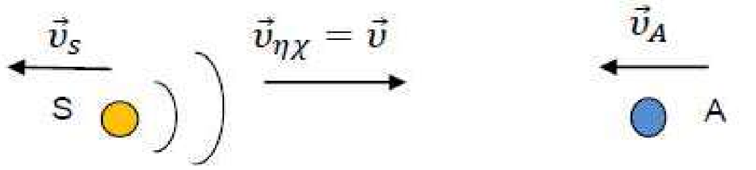
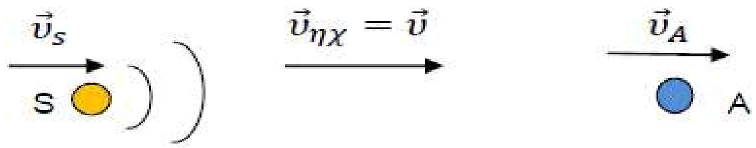
ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ	ΓΙΑ ΤΗ ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ	
Μεταφορικά μεγέθη	**Γραμμικά μεγέθη**	**Γωνιακά μεγέθη**
$\boldsymbol{x_{cm}}$	**S**	**θ**
$\upsilon_{cm}=\frac{dx_{cm}}{dt}$	$\upsilon_{\gamma\rho}$ ή $\upsilon=\frac{ds}{dt}$	$\omega=\frac{d\theta}{dt}$
$a_{cm}=\frac{d\upsilon_{cm}}{dt}$	$a_{\varepsilon\pi}=\frac{d\upsilon}{dt}$	$a_{\gamma\omega\nu}=\frac{d\omega}{dt}$
ΟΜΑΛΗ ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ	**ΟΜΑΛΗ ΣΤΡΟΦΙΚΗ**	
$\alpha_{cm}=0$, υ_{cm} = σταθερή , $x_{cm}=\upsilon_{cm}t$	$\alpha_{\varepsilon\pi}=0$, υ = σταθ $\alpha_{\kappa}=\upsilon^2/r=\omega^2 r$ $s=\upsilon t$	$\alpha_{\gamma\omega\nu}=0$, ω = σταθ θ = ωt
Ομαλά μεταβαλλόμενη μεταφορική	**Ομαλά μεταβαλλόμενη στροφική**	
α_{cm} = σταθερή $\upsilon_{cm}=\upsilon_0\pm\alpha_{cm}t$ $x_{cm}=\upsilon_o t\pm\frac{1}{2}a_{cm}t^2$	$\alpha_{\varepsilon\pi}$ = σταθερή $\upsilon=\upsilon_0\pm\alpha_{\varepsilon\pi}t$ $\Delta s=\upsilon_o t\pm\frac{1}{2}a_{\varepsilon\pi}t^2$	$\alpha_{\gamma\omega\nu}$ = σταθερή $\omega=\omega_o\pm\alpha_{\gamma\omega\nu}t$ $\Delta\theta=\omega_o t\pm\frac{1}{2}a_{\gamma\omega\nu}t^2$
$\boldsymbol{\chi_{cm}=S=\theta R}$ $\boldsymbol{\upsilon_{cm}=\upsilon=\omega R}$ $\boldsymbol{\alpha_{cm}=\alpha_{\varepsilon\pi}=\alpha_{\gamma\omega\nu}R}$	Σχέσεις μεταφορικών γραμμικών και γωνιακών μεγεθών για να έχω κύλιση χωρίς ολίσθηση	
Δύναμη **F**	Ροπή **τ**	
Μάζα αδράνειας **m**	Ροπή αδράνειας **I**	
ΣF = 0 ⇔ υ = 0 ή υ = σταθερή	Στ = 0 ⇔ ω = 0 ή ω = σταθερή (Ισορροπία)	
$\Sigma F=m\alpha_{cm}$	$\Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (θεμελιώδης νόμος)	
Ορμή **P** = mυ	Στροφορμή **L** = Iω	
$\frac{dp}{dt}=\Sigma F$	$\frac{dL}{dt}=\Sigma\tau$	
ΑΔΟ αν $\Sigma F_{\varepsilon\xi}=0\Rightarrow\vec{p}$ = σταθερή	ΑΔΣτροφορμής αν $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi}=0\Rightarrow\vec{L}$ = σταθερή	
Αν F = σταθερή $W_F=\pm Fx$	Αν τ = σταθερή $W_{\tau F}=\pm\tau\theta$	
$\frac{dW_F}{dt}=P_F=\pm F\upsilon$	$\frac{dW_{\tau_F}}{dt}=P_F=\pm\tau\omega$	
$K_{\mu\varepsilon\tau}=\frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2$	$K_{\sigma\tau\rho o\varphi}=\frac{1}{2}I\omega^2$	
ΘΜΚΕ $\frac{1}{2}m\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2-\frac{1}{2}m\upsilon_{\alpha\rho\chi}^2=\Sigma W_F$	ΘΜΚΕ $\frac{1}{2}I\omega_{\tau\varepsilon\lambda}^2-\frac{1}{2}I\omega_{\alpha\rho\chi}^2=\Sigma W_\tau$	
ΘΜΚΕ για τη ΣΥΝΘΕΤΗ κίνηση $(\frac{1}{2}m\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2+\frac{1}{2}I\omega_{\tau\varepsilon\lambda}^2)-(\frac{1}{2}m\upsilon_{\alpha\rho\chi}^2+\frac{1}{2}I\omega_{\alpha\rho\chi}^2)=\Sigma W_F+\Sigma W_\tau$		

ΚΡΟΥΣΕΙΣ

<table>
<tr><td>Διατήρηση της ορμής σε σύστημα σωμάτων</td><td>Αν $\Sigma \vec{F}_{\varepsilon\xi} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = σταθερή$</td></tr>
<tr><td colspan="2">ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ ΔΥΟ ΣΦΑΙΡΩΝ</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>Κεντρική ελαστική κρούση δύο σφαιρών</td><td>$\upsilon'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2$ (1) και
$\upsilon'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2$ (2)</td></tr>
<tr><td>Όταν $m_1 = m_2$ τότε :</td><td>(1) $\Rightarrow$ $\upsilon'_1 = \upsilon_2$ από την (2) $\Rightarrow$ $\upsilon'_2 = \upsilon_1$
δηλαδή οι σφαίρες ανταλλάσουν ταχύτητες.</td></tr>
<tr><td>Αν $\upsilon_2 = 0$
Κεντρική ελαστική κρούση δύο σωμάτων με δεύτερο σώμα ακίνητο</td><td>τότε $\upsilon'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1$ (3)
και $\upsilon'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1$ (4)</td></tr>
<tr><td>Όταν $m_2 >> m_1$</td><td>τότε η (3) $\Rightarrow$ $\upsilon'_1 = -\upsilon_1$ και η (4) $\Rightarrow$ $\upsilon'_2 = 0$</td></tr>
<tr><td>Όταν $m_1 >> m_2$</td><td>τότε η (3) $\Rightarrow$ $\upsilon'_1 = \upsilon_1$ και η (4) $\Rightarrow$ $\upsilon'_2 = 2\upsilon_1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Στις σχέσεις (1), (2), (3) και (4) οι ταχύτητες αντικαθίστανται με τις αλγεβρικές τους τιμές (με τα πρόσημά τους).</td></tr>
<tr><td colspan="2">ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΠΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ</td></tr>
<tr><td colspan="2">

$V = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}$</td></tr>
<tr><td>Απώλεια ενέργειας στην πλαστική κρούση</td><td>$E_{απωλ} = Q_\theta = K_{(ολ)ΠΡΙΝ} - K_{(ολ)ΜΕΤΑ}$</td></tr>
<tr><td>Ποσοστό % απώλειας ενέργειας στην πλαστική κρούση</td><td>$\pi\% = \frac{E_{απωλ}}{K_{(ολ)ΠΡΙΝ}} 100\%$</td></tr>
</table>

ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ Doppler (όλες οι περιπτώσεις)	
1. Παρατηρητής πλησιάζει στην ακίνητη πηγή	Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται $\upsilon_{\eta\chi,A} = \upsilon + \upsilon_A$ και μήκος κύματος $\lambda_A = \lambda$ και $\boxed{f_A = \frac{\upsilon+\upsilon_A}{\upsilon} f_S}$
2. Παρατηρητής απομακρύνεται από την ακίνητη πηγή	Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται $\upsilon_{\eta\chi,A} = \upsilon - \upsilon_A$ και μήκος κύματος $\lambda_A = \lambda$ και $\boxed{f_A = \frac{\upsilon-\upsilon_A}{\upsilon} f_S}$
3. Πηγή πλησιάζει σε ακίνητο παρατηρητή	Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται $\lambda_A = \lambda - \upsilon_S T$ και $\boxed{f_A = \frac{\upsilon}{\upsilon-\upsilon_S} f_S}$
4. Πηγή απομακρύνεται από ακίνητο παρατηρητή	Ο παρατηρητής Αντιλαμβάνεται $\lambda_A = \lambda + \upsilon_S T$ και $\boxed{f_A = \frac{\upsilon}{\upsilon+\upsilon_S} f_S}$
5. Πηγή και παρατηρητής κινούνται αντίθετα και πλησιάζουν	 $f_A = \frac{\upsilon+\upsilon_A}{\upsilon-\upsilon_S} f_S$ $\upsilon_{\eta\chi,A} = \upsilon_{\eta\chi} - (-\upsilon_A) = \upsilon + \upsilon_A$ $\lambda_A = \frac{\upsilon_{\eta\chi,A}}{f_A}$

6. Πηγή και παρατηρητής κινούνται αντίθετα και απομακρύνονται	
	$f_A = \frac{\upsilon - \upsilon_A}{\upsilon + \upsilon_S} f_S$ $\upsilon_{\eta\chi,A} = \upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_A = \upsilon - \upsilon_A$ $\lambda_A = \frac{\upsilon_{\eta\chi,A}}{f_A}$
7. Ο παρατηρητής ακολουθεί την κινούμενη πηγή	
	$f_A = \frac{\upsilon + \upsilon_A}{\upsilon + \upsilon_S} f_S$ $\upsilon_{\eta\chi,A} = \upsilon_{\eta\chi} - (-\upsilon_A) = \upsilon + \upsilon_A$ $\lambda_A = \frac{\upsilon_{\eta\chi,A}}{f_A}$
8. Πηγή ακολουθεί τον κινούμενο παρατηρητή	
	$f_A = \frac{\upsilon - \upsilon_A}{\upsilon - \upsilon_S} f_S$ $\upsilon_{\eta\chi,A} = \upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_A = \upsilon - \upsilon_A$ $\lambda_A = \frac{\upsilon_{\eta\chi,A}}{f_A}$
Όλες οι περιπτώσεις $\dfrac{\dfrac{+A\ \text{πλησιάζει}}{-A\ \text{απομακρύνεται}}}{\dfrac{-S\ \text{πλησιάζει}}{+S\ \text{απομακρύνεται}}}$	$\boxed{f_A = \frac{\upsilon \pm \upsilon_A}{\upsilon \mp \upsilon_S} f_S}$